

УДК 528.48

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТНОГО ПРОФИЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СООРУЖЕНИЙ

О. В. КУЗНЕЦОВА<sup>1\*</sup>, С. Г. РАДОВ<sup>1\*\*</sup>, П. С. ЭФЕНДЯН<sup>2\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> Черкасский государственный технологический университет, Украина

<sup>2</sup> Кафедра картографии и геоморфологии ЕГУ, Армения

Статья посвящена оптимизации проектного профиля линейных сооружений аналитическими методами по основным критериям оптимальности (минимизация рабочих отметок, баланс и минимум земляных работ, предельное значение проектного уклона). Рассмотрено аналитическое проектирование методами наименьших квадратов и квадратичного программирования. Разработана методика уравнивания проектных отметок точек перегиба профиля, в том числе с учетом весовых коэффициентов влияния рабочих отметок на баланс земляных работ. Показано, что для учета дополнительных условий оптимизации суммы рабочих отметок и предельного уклона целесообразно использовать метод квадратичного программирования. Приведены примеры аналитического проектирования продольного профиля участка автомобильной дороги.

<https://doi.org/10.46991/PYSU:C.2024.58.1.041>

**Keywords:** linear structure, longitudinal profile, working mark, optimality criteria, least squares method, quadratic programming method.

**Введение.** В практике проектирования линейных сооружений обычно используется графоаналитический метод с поэтапным приближением к приемлемым проектным решениям. Аналитический метод более перспективен для автоматизации процесса проектирования, обеспечения критериев оптимальности и повышения точности расчетов.

В основе аналитического проектирования продольного профиля линейных сооружений [1] лежит оптимизация методами наименьших квадратов (НК) и квадратичного программирования (КП) целевых функций  $F = f(r)$  рабочих отметок ( $r_i$ ), зависящих от фактических ( $H_i$ ) и проектных ( $Z_i$ ) отметок рельефных точек (см. рисунок):

$$r_i = Z_i - H_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

В зависимости от формы целевой функции принято разделять следующие методы оптимизации методом НК [1]:

\* E-mail: [kuznec-68@ukr.net](mailto:kuznec-68@ukr.net)

\*\* E-mail: [s.radov@ukr.net](mailto:s.radov@ukr.net)

\*\*\* E-mail: [armgeoinform@mail.ru](mailto:armgeoinform@mail.ru)

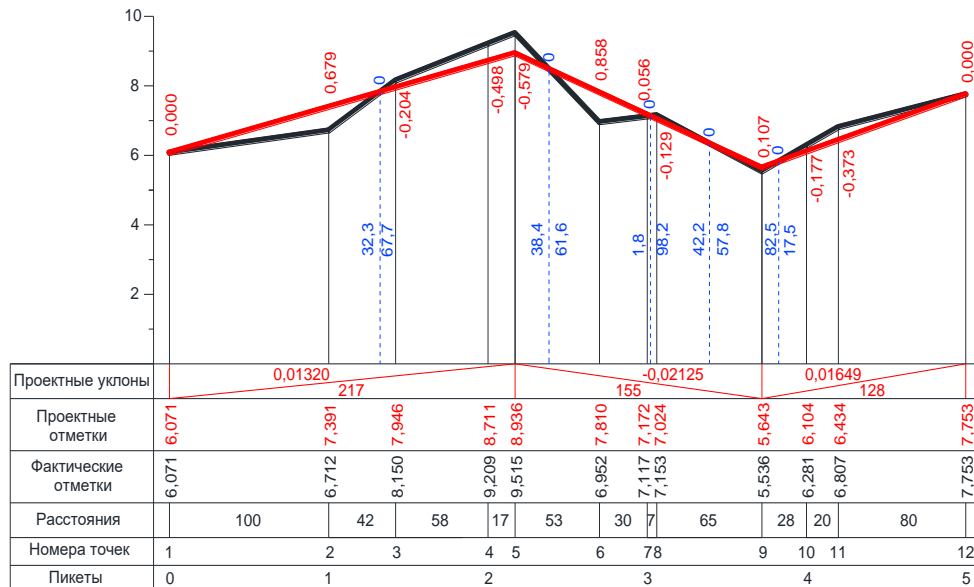
а) минимизация рабочих отметок:  $F = \sum r^2 = \min$ ;

б) минимизация балансовых рабочих отметок:  $F = \sum pr^2 = \min$ ,  
где  $p$  – коэффициент влияния рабочей отметки на баланс земляных работ.

Метод КП позволяет добавлять к указанным целевым функциям дополнительные условия оптимизации  $\sum r = 0$  или  $\sum pr = 0$ , а также задавать предельное значение проектных уклонов ( $u_{пр.}$ ).

Целью статьи является разработка алгоритма оптимизации проектного профиля линейных сооружений аналитическими методами.

**Результаты и обсуждения.** Проектирование начинается с построения фактического продольного профиля (см. рисунок) и установления участков с одинаковым проектным уклоном между точками с локальными экстремальными значениями фактических отметок (например, участки с номерами точек 1–5, 5–9 и 9–12).



Продольный профиль линейного сооружения при  $\sum pr^2 = \min$ .

Одним из критериев оптимальности проекта линейного сооружения является баланс земляных работ. Если принять, что ширина линейного сооружения примерно одинакова на всех участках, то баланс площадей насыпи ( $S_H$ ) и выемки ( $S_B$ ) на профиле приводит к балансу земляных масс ( $\Delta S$ ):

$$\Delta S = \frac{|S_H - S_B|}{S_H + S_B} 100\%. \quad (2)$$

Площадь насыпи или выемки элементарного участка, расположенного между смежными точками профиля с известными рабочими отметками, зависит от величины рабочих отметок ( $r$ ) и расстояния между точками ( $d$ ).

Для аналитического проектирования параметричным методом НК примем в качестве неизвестных параметров проектные отметки начальных и

конечных точек участков профиля с одинаковым проектным уклоном и установим, что их приближенные значения  $Z'$  равны фактическим отметкам  $H$ .

Параметрические уравнения связи в этом случае имеют вид:

$$r_{j,i} = (Z_{j,0} + u_j x_{j,i}) - H_{j,i} = Z_{j,0} \left(1 - \frac{x_{j,i}}{D_j}\right) + Z_{j,k} \frac{x_{j,i}}{D_j} - H_{j,i}, \quad (3)$$

где  $j$  – номер участка;  $D_j$  – длина  $j$ -го участка;  $i = 1, 2, \dots, k$  – номер текущей промежуточной точки на  $j$ -м участке;  $x_{j,i} = X_{j,i} - X_{j,0}$  – расстояние текущей точки  $i$  от начала  $j$ -го участка.

Перейдем от уравнения связи (3) к параметрическому уравнению рабочих отметок  $r_{j,i}$ :

$$a_{j,0} \Delta_{j,0} + a_{j,k} \Delta_{j,k} + l_{j,i} = r_{j,i}, \quad (4)$$

где  $\Delta_{j,0}$ ,  $\Delta_{j,k}$  – поправки к приближенным значениям проектных отметок  $Z'_{j,0}$  и  $Z'_{j,k}$

Коэффициенты параметрических уравнений поправок для промежуточной точки  $i$ , расположенной между начальной ( $j, 0$ ) и конечной ( $j, k$ ) точками  $j$  участка определяются согласно (3) по следующим формулам:

$$a_{j,0} = 1 - \frac{x_{j,i}}{D_j} \quad \text{и} \quad a_{j,k} = \frac{x_{j,i}}{D_j}. \quad (5)$$

Свободный член параметрического уравнения поправок определяется для каждой точки по приближенному значению проектных ( $Z'_{j,i}$ ) и фактических ( $H_{j,i}$ ) отметок соответствующих точек профиля:

$$l_{j,i} = Z'_{j,i} - H_{j,i}. \quad (6)$$

Система параметрических уравнений поправок, принимая в качестве поправок рабочие отметки точек профиля, имеет следующий матричный вид:

$$A \Delta + L = R, \quad (7)$$

где  $A$  – матрица коэффициентов (5) параметрических уравнений поправок;  $L$  – вектор свободных членов (6) параметрических уравнений поправок;  $R$  – вектор рабочих отметок (4) точек профиля;  $\Delta$  – вектор поправок к приближенным значениям проектных отметок.

Для определения неизвестных поправок  $\Delta_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ) составляется и решается система нормальных уравнений

$$(A^T P A) \Delta + (A^T P L) = 0, \quad (8)$$

где  $P$  – диагональная матрица весовых коэффициентов.

Контроль вычисления  $[pr^2]$  при параметрическом методе уравновешивания можно выполнить по формуле [2]:

$$[pr^2] = [p_i a_{i,1} l_i] \Delta_1 + [p_i a_{i,2} l_i] \Delta_2 + \dots + [p_i a_{i,n} l_i] \Delta_m + [p_i l_i l_i]. \quad (9)$$

Для минимизации рабочих отметок методом НК устанавливаем равные значения весовых коэффициентов (напр.  $p_i = 1$ ), т.е. вычисляем рабочие отметки  $r_i$  при условии  $\sum r_i^2 = \min$ . Предположим, что в процессе проектирования отметки начала и конца трассы остаются неизменными. Тогда неизвестными являются проектные отметки промежуточных точек перегиба проектного профиля.

По результатам уравнивания методом НК имеем  $Z_5 = 9,038$  м,  $Z_9 = 5,622$  м,  $[r^2] = 1,99$ , видимые на профиле площади насыпи  $S_H = 82,10$  м<sup>2</sup> и выемки  $S_B = 52,97$  м<sup>2</sup>, баланс земляных работ составляет  $\Delta S = 21,6\%$ .

Способ минимизации балансовых рабочих отметок реализуется методом НК при условии  $\sum p_i r_i^2 = \min$  с учетом весовых коэффициентов ( $p_i$ ), которые устанавливаются по формулам:

$$\begin{cases} p_1 = d_{1,2}/200; \\ p_i = (d_{i-1,i} + d_{i,i+1})/200, & i = 2,3,4, \dots, n-1, \\ p_n = d_{n-1,n}/200, \end{cases} \quad (10)$$

где  $d_{i,i+1} = X_{i+1} - X_i$  – расстояние между точками профиля с номерами  $i$  и  $i+1$ . По результатам уравнивания методом НК имеем  $Z_5 = 8,936$  м,  $Z_9 = 5,643$  м и  $[pr^2] = 0,96$ . Проектный профиль, построенный на основе минимизации балансовых рабочих отметок при условии  $[pr^2] = \min$ , приведен на рисунке. Как ожидалось, показатель баланса видимых на профиле площадей земляных работ значительно улучшился и составляет 9,6%.

Аналитическое проектирование методом КП заключается в нахождении неизвестных параметров при экстремальном (max или min) значении целевой функции второго порядка и системы линейных ограничений [3].

Следует отметить, что использование методом КП для минимизации рабочих ( $F = \sum r_i^2 = \min$ ) или балансовых рабочих отметок ( $F = \sum p_i r_i^2 = \min$ ) без дополнительных ограничений приводит к результатам, полученным методом НК.

С точки зрения проектирования линейных сооружений наиболее актуальными являются обеспечение минимума рабочих отметок, баланса земляных работ и ограничение проектных уклонов предельными значениями.

Эту задачу можно решить, например, с использованием сервиса “Поиск решения” в электронных таблицах Microsoft Excel [1]. Для этого по формуле (4) составляется таблица параметрических уравнений поправок, включающая: рабочие отметки ( $r$ ); вес ( $p$ ); коэффициенты ( $a$ ) и свободные члены ( $l$ ). Эти расчеты, как при методе НК, выполняются для приближенных значений выбранных неизвестных параметров – проектных отметок начальных и конечных точек участков с одинаковыми уклонами. Затем резервируются ячейки для поправок  $\Delta Z$  к неизвестным параметрам  $Z$ , столбцы для вычисления рабочих отметок  $r_i$ , а также произведений  $p_i r_i$  и  $p_i r_i^2$ , в которых записываются формулы для расчета соответствующих величин.

Для выполнения оптимизации заполняется форма “Параметры поиска решения”:

- указывается ячейка таблицы, в которой вычисляется значение целевой функции  $\sum p_i r_i^2$ ;
- указывается условие оптимизации – “Минимум”;
- указываются ячейки, зарезервированные для поправок  $\Delta Z$ ;
- указывается ячейка таблицы, в которой вычисляется  $\sum p_i r_i$  и условие “= 0”;

– снимается отметка о том, что переменные могут быть только положительными.

Оптимизация целевой функции  $F = [pr^2] = \min$  методом квадратичного программирования при условии  $[pr] = 0$  показывает, что наблюдается баланс площадей насыпи и выемки  $S_H = S_B = 68,91 \text{ м}^2$ .

Для обеспечения допустимых значений проектных уклонов

$$|u_j| \leq u_{\text{пр}}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (11)$$

создаются дополнительные линейные неравенства

$$\left| \frac{Z_{j,k} - Z_{j,0}}{D_j} \right| - u_{\text{пр}} \leq 0, \quad (12)$$

где  $u_{\text{пр}}$  – предельное значение проектного уклона.

После преобразования (12) получаем параметрическую форму неравенства в виде

$$\Delta_{j,0} - \Delta_{j,k} + D_j (|u_j| - u_{\text{пр}}) \leq 0, \quad (13)$$

где  $\Delta_{j,0}$  и  $\Delta_{j,k}$  – поправки к приближенным значениям проектных отметок начальной и конечной точек  $j$ -го участка с проектным уклоном.

Параметрические неравенства для уклонов добавляются к ограничениям в параметрах поиска решения.

**Заключение.** Автоматизация процесса проектирования продольного профиля линейных сооружений позволяет аналитически определять оптимальные решения методами НК и КП по различным критериям.

Независимо от выбранных критериев оптимизации процедура аналитического проектирования начинается с анализа фактического профиля, построения тренда рельефа и составления параметрических уравнений для рабочих отметок, что упрощает алгоритм оптимизации и разработку компьютерной программы.

В работе предложены унифицированные для методов НК и КП способы определения коэффициентов параметрических уравнений, установки весовых коэффициентов и оценки баланса земляных работ, а также параметрическая форма неравенства для предельного значения проектного уклона.

Результаты работы могут использоваться для повышения качества и оптимизации проектных решений продольного профиля линейных сооружений.

Поступила 27.02.2024

Получена с рецензии 03.04.2024

Утверждена 12.04.2024

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баран П.И. *Инженерная геодезия. Монография*. Киев, ПАТ “ВИПОЛ” (2012), 618.
2. Войтенко С.П. *Математическая обработка геодезических измерений. Метод наименьших квадратов* (учебное пособие). Киев, КНУБА (2005), 236.
3. Гончаренко Я.В. *Математическое программирование*. Киев, НПУ им. М.П. Драгоманова (2010), 184.

Օ. Վ. ԿՈՒԶՆԵՏՈՎԱ, Ս. Գ. ՌԱԴՈՎ, Պ. Ս. ԷՖԵՆԴՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ԿԱՌՈՒՅՑՆԵՐԻ ՆԱԽԱԳԾԱՅԻՆ  
ՊՐՈՖԻԼԻ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածը նվիրված է գծային կառույցների նախագծային պրոֆիլի օպտիմալացմանը՝ օգտագործելով վերլուծական մեթոդները՝ ըստ օպտիմալության հիմնական չափանիշների (աշխատանքային նիշերի փոքրացում, նվազագույն հաշվեկշիռ և հողային աշխատանքներ, նախագծային թեքության սահմանային արժեքներ): Դիտարկված է վերլուծական նախագծում՝ նվազագույն քառակուսիների և քառակուսային ծրագրավորման եղանակներով: Մշակվել է պրոֆիլի բեկման կետերի նախագծային նիշերի հավասարակշռման մեթոդիկա՝ հաշվի առնելով նաև աշխատանքային նիշերի կշռային գործակիցների ազդեցությունը հողային աշխատանքների հաշվեկշռի վրա: Ցույց է տրված, որ աշխատանքային նիշերի և սահմանային թեքության օպտիմալացման լրացուցիչ պայմանները հաշվի առնելու համար նպատակահարմար է կիրառել քառակուսային ծրագրավորման եղանակը: Բերված են ավտոմոբիլային ճանապարհի հատվածի երկայնական պրոֆիլի վերլուծական նախագծման օրինակներ:

O. V. KUZNETOVA, S. G. RADOV, P. S. EFENDYAN

OPTIMIZATION OF THE LINEAR STRUCTURE DESIGN PROFILE

Summary

The article considers the analytical methods used to optimize the linear structure design profile, according to the main criteria of optimality (minimization of working marks, minimum balance and land work, and the limit value of the design slope). An analytical design through the use of the methods of least squares and quadratic programming was considered. The authors developed and offered the methodology that can be used to balance the design marks of profile inflection points, taking into consideration the weighting factors of the working marks influence the balance of land works. The quadratic programming method has been proven to be efficient and useful when it is necessary to take into account additional optimization conditions regarding the sum of working marks and the marginal slope. Examples of analytical design of a longitudinal profile of a road section are introduced.