ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2004 Естественные науки

Математика

УДК 517.5

А. К. ТАСЛАКЯН

ОЦЕНКА ПОЛНОЙ ВАРИАЦИИ КВАЗИПОЛИНОМА ЛЕЖАНДРА

В работе рассматриваются квазиполиномы Лежандра со старшими коэффициентами, равнымы единице. Получена оценка для полных вариаций таких квазиполиномов. Этот результат обобщает известную оценку для классических полиномов Лежандра.

В статье [1] доказана, что полная вариация полинома Лежандра при стандартной нормировке $(P_n(1)=1)$ удовлетворяет неравенству $\int\limits_{-1}^{1}/P_n'(x)/dx<A\sqrt{n+\frac{1}{2}}-B$ с постоянными $A=2\left[\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\pi}\right]^2$, $B=1{,}055075$. Порядок роста $n^{\frac{1}{2}}$ и коэффициент A неулучшаемы.

Наша цель заключается в том, чтобы для квазиполинома Лежандра получить аналогичную оценку.

Рассмотрим последовательность чисел

$$0=\gamma_0<\gamma_1\le\gamma_2\le, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_\nu}=\infty, \quad \gamma_\nu\ge\gamma_{\nu-1}+2 . \tag{1}$$

Определение. Квазиполиномом Лежандра со старшим коэффициентом, равным единице, называется выражение (см. [2])

$$\widetilde{X}_n(x)=\frac{A_n}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1} z+\gamma_\nu+1}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} z-\gamma_\nu}x^z dz, \qquad A_n=\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_n-\gamma_\nu}{\gamma_n+\gamma_\nu+1}<1 , \tag{2}$$

где контур C охватывает окрестности нулей знаменателя подынтегральной функции.

Теорема. При выполнении условия (1) для $V_n=\underset{x\in(0,1)}{Var}\,\widetilde{X}_n(x)=\int\limits_0^1\left|\widetilde{X}_n'(x)\right|dx$ справедливо неравенство

$$V_n<C_0\sqrt{R_n}\,, \tag{3}$$

где $R_n = \max[2(\gamma_n, n)]$, $C_0 > 0$ постоянная, не зависящая от n.

Доказательство. Имеем

$$\widetilde{X}'_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(z+\gamma_\nu+1)}{\prod_{\nu=1}^{n}(z-\gamma_\nu)} x^z\, dz,$$

где $\gamma_0 = 0$. Обозначим $z - 1 = z'$, тогда будем иметь

$$\widetilde{X}'_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(z+\gamma_\nu+2)}{\prod_{\nu=1}^{n}(z-\gamma_\nu+1)} x^z dz.$$

С другой стороны, имеем $V_n = \int_0^1 \left|\widetilde{X}'_n(x)\right| dx$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\int_0^1 \left|\widetilde{X}'_n(x)\right| dx \le \left(\int_0^1 dx \int_0^1 \widetilde{X}'^2_n(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \widetilde{X}'_n(x)\widetilde{X}'_n(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C Q_n(Z) x^z dz \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} Q_n(z_1) x^{z_1} dz_1 \right) dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

где $Q_n(z) = \dfrac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(z+\gamma_\nu+2)}{\prod_{\nu=1}^{n}(z-\gamma_\nu+1)}$.

Далее, $\int_0^1 \left|\widetilde{X}'_n(x)\right| dx \le \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C Q_n(z) dz \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} Q_n(z_1) \frac{x^{z+z_1+1} \big|_{x=0}^1 dz_1}{z+z_1+1} \right]^{\frac{1}{2}}$ Выбор контуров C и C' можем сделать так, чтобы $\mathrm{Re}(z+z_1+1) > 0$, и тогда точка $-z-1$, где $z \in C$, окажется вне области $\overline{D}'$ с границей C', поэтому получим

$$\int \left|\widetilde{X}'_n(x)\right| dx \le \left[\frac{1}{2\pi i} \int Q_n(z) dz \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{Q_n(z_1) dz_1}{z+z_1+1} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_C Q_n(z) \left[\operatorname*{Res}_{z_1=-z-1} \frac{Q_n(z_1)}{z+z_1+1} - \operatorname*{Res}_{z_1=\infty} \frac{Q_n(z_1)}{z+z_1+1} \right] dz \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_C Q(z)[Q_n(-z-1)+1] dz \right]^{\frac{1}{2}} = \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_C Q_n(z) Q(-z-1) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_C Q_n(z) dz \right]^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\int_0^1 \left|\widetilde{X}'_n(x)\right|dx \le \frac{1}{2\pi}\left[\int_C \left|\frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(z+\gamma_\nu+2)(z-\gamma_\nu-1)}{\prod_{\nu=1}^{n}(z-\gamma_\nu+1)(z+\gamma_\nu)}\right|dz\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\pi}\left[\int_C \left|\frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(z+\gamma_\nu+2)}{\prod_{\nu=1}^{n}(z-\gamma_\nu+1}\right|dz\right]^{\frac{1}{2}},$$

где точки $-\gamma_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,n$, остаются вне контура C. В качестве контура C возьмем отрезок прямой $(-iR_n\,,\,iR_n)$ и полуокружность $z=R_n e^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\left|\frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(z+\gamma_\nu+2)(z-\gamma_\nu-1)}{\prod_{\nu=1}(z+\gamma)_\nu(z-\gamma_\nu+1)}\right| = \left[\frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}\left[y^2+(\gamma_\nu+2)^2\right]\left[y^2+(\gamma_\nu+1)^2\right]}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(y^2+\gamma_\nu^2\right)\left[y^2+(\gamma_\nu-1)^2\right]}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Так как выполняется условие (1), то $\dfrac{\prod_{\nu=0}^{n-1}\left[y^2+(\gamma_\nu+2)^2\right]\left[y^2+(\gamma_\nu+1)^2\right]}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(y^2+\gamma_\nu^2\right)\left[y^2+(\gamma_\nu-1)^2\right]}\le 1.$

Поэтому

$$V_n=\int_0^1\left|X'_n(x)\right|dx \le \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{R_n}dy+\frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\left|A_n(z)\right|dz+\frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\left|B_n(z)\right|dz\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

где C_1 – полуокружность $z=R_n e^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$,

$$A_n(z)=\frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(z+\gamma_\nu+2)(z-\gamma_\nu-1)}{\prod_{\nu=1}^{n}(z-\gamma_\nu+1)(z+\gamma_\nu)}\,, \qquad B_n(z)=\frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(z+\gamma_\nu+2)}{\prod_{\nu=1}^{n}(z-\gamma_\nu+1)}.$$

Далее,

$$\left|A_n(z)\right|^2=\frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}\left[R_n^2+2R_n(\gamma_\nu+2)\cos\varphi+(\gamma_\nu+2)^2\right]\left[R_n^2-2R_n(\gamma_\nu+1)\cos\varphi+(\gamma_\nu+1)^2\right]}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(R_n^2+2R_n\gamma_\nu\cos\varphi+\gamma_\nu^2\right)\left[R_n^2-2R_n(\gamma_\nu-1)\cos\varphi+(\gamma_\nu-1)^2\right]}=$$

$$=\widetilde{B}_n(y)\prod_{\nu=1}^{n-1}\left[1+\frac{4(R_n\cos\varphi+\gamma_\nu+1)}{R_n^2+2R_n\gamma_\nu\cos\varphi+\gamma_\nu^2}\right]\left[1-\frac{4(R_n\cos\varphi-\gamma_\nu)}{R_n^2-2R_n(\gamma_\nu-1)\cos\varphi+(\gamma_\nu-1)^2}\right],$$

где

$$\widetilde{B}_n(y)=\frac{\left[R_n^2+2R_n(\gamma_0+2)\cos\varphi+(\gamma_0+2)^2\right]\left[R_n^2-2R_n(\gamma_0+1)\cos\varphi+(\gamma_0+1)^2\right]}{\left(R_n^2+2R_n\gamma_n\cos\varphi+\gamma_n^2\right)\left[R_n^2-2R_n(\gamma_n-1)\cos\varphi+(\gamma_n-1)^2\right]}\le$$

$$\leq \frac{(R_n+2)^2(R_n^2+1)}{(R_n^2+\gamma_n^2)[R_n-(\gamma_n-1)]^2}.$$

так как $\gamma_0 = 0$. С другой стороны,

$$\prod_{\nu=1}^{n-1}\left[1+\frac{4(R_n\cos\varphi+\gamma_\nu+1)}{R_n^2+2R_n\gamma_\nu\cos\varphi+\gamma_\nu^2}\right]\left[1-\frac{4(R_n\cos\varphi-\gamma_\nu)}{R_n^2-2R_n(\gamma_\nu-1)\cos\varphi+(\gamma_\nu-1)^2}\right]\leq$$

$$\leq \exp\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{R_n+2\gamma_\nu}{R_n^2+\gamma_\nu^2}\right)\leq \exp\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{R_n+2\gamma_n}{R_n^2}\right).$$

Так как $R_n = \max[2(\gamma_n, n)]$, то $\exp\left(\sum_{\gamma=1}^{n-1}\frac{R_n+2\gamma_n}{R_n^2}\right)< C_2$. Окончательно имеем $|A_n(z)|< C_3$. Таким же путем получается $|B_n(z)|< C_4$. Возвращаясь к (4), будем иметь $V_n = \int_0^1|\widetilde{X}_n'(x)|dx < \left(\frac{R_n}{\pi}+\frac{\overline{C}R_n}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} < C_0\sqrt{R_n}$.

Теорема доказана.

Кафедра математического анализа *Поступила 15.05.2003*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Антонов Б.А., Холшевников К.В.** – Вестник ЛГУ, 1980, № 19, с. 8–10.
2. **Бадалян Г.В.** – ДАН Арм. ССР, 1960, т. XXX, № 5, с. 251–255.

Ա. Կ. ԹԱՍԼԱՔՅԱՆ

ԼԵԺԱՆԴՐԻ ՔՎԱԶԻԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԼՐԻՎ ՎԱՐԻԱՑԻԱՅԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է Լեժանդրի քվազիբազմանդամ, որի ավագ գործակիցը հավասար է մեկի և ստացվում է այդ բազմանդամի լրիվ վարիացիայի գնահատական:

A. K. TASLAKIAN

TOTAL VARIATION ESTIMATE OF LEGANDRE QUASIPOLYNOMIALS

Summary

The paper considers Legandre quasipolynomial, the great coefficient of which is equal to one and total variation estimate of those polynomials is derived.