ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2004 Естественные науки

Математика

УДК 519.21

Т. А. ГРИГОРЯН

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В МОДЕЛИ GI|G|1|∞

В настоящей работе найдена еще одна новая оценка скорости сходимости накопленной и невыполненной актуальной работы в модели GI |G|1|∞ к ее стационарному аналогу. Результат позволяет получить аналогичную оценку для суммарного простоя, когда загрузка модели больше единицы.

§1. Введение. *Модель* $GI/G/1/\infty$. В одноканальную систему обслуживания с ожиданием в случайные моменты времени $\{t_n\}$, где $0 \le t_1 \le t_2 \dots$, поступают одиночные вызовы. Вызовы перенумерованы в порядке поступления чисел 1,2,... . Время обслуживания n-го, $n \ge 1$, вызова обозначим v_n, и пусть $u_n = t_n - t_{n-1}, t_0 = 0$. В момент $t = 0$ модель свободна от вызовов.

Последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ неотрицательных случайных величин (СВ) определены на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$. Они независимы (друг от друга) и образуют последовательности независимых одинаково распределенных (НОР) СВ с функциями распределения (ФР) $A(t)$ и $B(t)$ на $[0,+\infty)$ соответственно.

По классификации Кендалла [1] – это модель GI|G|1|∞.

Предположения. Допускаем $A(+0) = 0$ и $B(+0) = 0$. Первое условие влечет $P(0 < t_1 < t_2 < \dots) = 1$, где P – знак вероятности. Второе означает, что вероятность «мгновенного» обслуживания равна нулю. Условия позволяют избежать технических сложностей при анализе модели.

Далее, предполагаем $0 < \alpha_1 = Mu_1 < +\infty$ и $0 < \beta_1 = Mv_1 < +\infty$, где M – знак математического ожидания. С помощью средних α_1 (промежутка между соседними поступлениями вызовов) и β_1 (времени обслуживания) определяется величина $\rho_1 = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$, называемая *загрузкой* модели.

Дисциплина обслуживания предполагается ***консервативной***.

Дисциплина обслуживания *консервативна*, если при ее использовании внутри модели работа не создается и не исчезает, а лишь привносится в модель извне поступлением вызовов [2].

Обозначим через w_n, $n \ge 1$, накопленную и невыполненную работу в момент $t_n - 0$. Отметим, что в случае дисциплины FIFO (first in – first out), которая является консервативной, w_n, $n \ge 1$, совпадает со *временем ожидания* начала обслуживания n-го поступившего вызова.

Информация. Известно, что [1]

1) существует предел

$$w_n \Rightarrow w, \quad n \to +\infty, \tag{1}$$

где $\Rightarrow$ – знак слабой сходимости. Предельная СВ w при $\rho_1 < 1$ называется стационарным временем ожидания. Ее ФР $W(x) = P(w < x)$, $x \ge 0$, удовлетворяет условию $W(+\infty) = 1$;

2) имеет место свойство *эргодичности*. Именно при $\rho_1 < 1$, если $w_1 = y$, где $y \ge 0$ – не случайное число, то существует предел

$$\lim_{n \to +\infty} P(w_n < x / w_1 = y) = W(x) \tag{2}$$

в точках x непрерывности $W(x)$, не зависящий от y (равенства (1) и (2) при $y = 0$ эквивалентны). Здесь $P(A/B)$ – условная вероятность события A при осуществлении события B.

Имеется много результатов, оценивающих скорость сходимости w_n к w при $n \to +\infty$ (см., напр., [3]). Настоящая работа посвящена получению еще одного результата такого типа.

§2. Результат. Обозначим через $w_n(y)$, $n > 1$, $y \ge 0$, работу в момент $t_n - 0$ при условии $w_1 = y$. Тогда $w_n(y)$, $n > 1$, $y \ge 0$, есть решение системы уравнений (см. [1]):

$$w_{k+1}(y) = \max(0, w_k(y) + X_k), k = \overline{1, n-1}, \tag{3}$$

где $\{X_n = v_n - u_{n+1}\}$ – последовательность НОР СВ. Ясно, что $w_n(0) = w_n, n \ge 1$.

Рассмотрим последовательность НОР СВ $\{\xi_n\}$, где $\xi_n = X_n + \delta$, $n \ge 1$, $\delta = \alpha_1 - \beta_1 > 0$ (поскольку $\rho_1 < 1$). При некотором $\varepsilon \in (0,1)$ предполагаем выполненным условие

$$m_{2+\varepsilon} \overset{def}{=} M / \xi_1 /^{2+\varepsilon} < +\infty. \tag{4}$$

Сформулируем результат работы.

Теорема. Пусть $\rho_1 < 1$ и выполнено условие (4). Тогда при $x > 0$ и $n \ge 1$

$$0 \le P(w_{n+1} < x) - P(w < x) \le \frac{m_{2+\varepsilon}(1+\varepsilon)(4+\varepsilon)}{\varepsilon \delta^{2+\varepsilon}} \frac{1}{(n + (x/\delta))^{\varepsilon/2}}. \tag{5}$$

Далее, для $y \in (0, x)$ и $n \ge 1$

$$-\frac{m_{2+\varepsilon}}{\delta^{2+\varepsilon}}(1+\varepsilon)(2+\frac{\varepsilon}{2})\frac{1}{(n+\frac{x-y}{\delta})^{1+(\varepsilon/2)}} \le P(w_{n+1}(y)<x)-P(w_{n+1}<x)\le 0\,. \quad (6)$$

Более того, первое неравенство (6) справедливо для любого $y>0$ и заданного $x<0$ при $n>(y-x)/\delta$.

Метод доказательства теоремы основан на вытекающих из уравнений (3) двусторонних неравенствах. В рамках метода более сильные ограничения на сходимость моментов СВ ξ_1 приводят к «улучшению» скорости сходимости. Например, если

$$m_p \overset{def}{=} M\,|\,\xi_1\,|^p<+\infty, p\ge 3\,, \quad (7)$$

то при $x>0$, $y\in(0,x)$ и $n\ge 1$ в случае $\rho_1<1$ метод дает следующие оценки скорости сходимости w_n к w:

$$-\frac{m_pC(p)}{\delta^p}\frac{1}{\left(n+\frac{x-y}{\delta}\right)^{p/2}}\le P(w_{n+1}(y)<x)-p(w<x)\le\frac{2}{p-2}\frac{m_pC(p)}{\delta^p}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}-1}}, (8)$$

где $C(p)>0$ – некоторая константа, зависящая лишь от p.

Более того, в силу зад. 31, гл. 3, стр. 98 [4], неравенства (8) имеют место с константой $C(p)$, определяемой равенством $C(p)=p(p-1)2^{p-3}\left(1+\frac{2}{p}(K_{m,p})^{\frac{p-2}{2m}}\right)$, где $m>0$ – целое число. Оно определяется из условия $2m\le p<2m+2$, а константа $K_{m,p}=\sum_{n=1}^{m}\frac{n^{2m-1}}{(n-1)!}$. Например, при $p=3$ имеем $m=1$ и $K_{1,p}=1$. Тогда $C(3)=3\cdot 2(1+2/3)=10$. Однако при $p=2$ метод неэффективен.

С $w_n, n\ge 1$, связана другая характеристика модели GI | G | 1 | ∞ –суммарный *простой* прибора $I_n, n\ge 1$, за $[0,t_n]$, который (как и w_n) *инвариантен* в классе консервативных дисциплин.

Известно, что [5] при $\rho_1>1$

1') существует предел $I_n \Rightarrow I, n\to+\infty$;

2') $I_1=t_1$, $I_n-I_1=w_n-S_{n-1}, n\ge 2$, где $S_{n-1}=X_1+\ldots+X_{n-1}, S_0=0$;

3') ФР $\hat{I}(x)=P(I<x), x>0$, удовлетворяет условию $\hat{I}(+\infty)=1$, но не является эргодичной.

Так как, согласно (3), $w\overset{d}{=}\sup_{n\ge 0}S_n$, где d означает совпадение ФР обеих частей случайного равенства, то, в силу свойств 1'), 2'), при $\rho_1>1$

$$I \stackrel{d}{=} -\inf_{n\ge 0} S_n = \sup_{n\ge 0}(-S_n). \tag{9}$$

Равенства (9) показывают, что путем смены местами последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ неравенства (5) справедливы при $\rho_1 < 1$ и могут быть переписаны для $I(x)$ при $\rho_1 > 1$. Тогда $\delta = \alpha_1 - \beta_1 < 0$ при $\rho_1 > 1$.

Таким образом, справедливо

Следствие. Пусть $\rho_1 > 1$ и выполнено условие (4). Тогда при $x > 0$ и $n \ge 1$ выполняется условие

$$0 \le P(I_{n+1} < x) - P(I < x) \le \frac{m_{2+\varepsilon}(1+\varepsilon)(4+\varepsilon)}{\varepsilon(-\delta)^{2+\varepsilon}} \frac{1}{\left(n - \left(\frac{x}{\delta}\right)\right)^{\varepsilon/2}}. \tag{10}$$

§3. Доказательство теоремы. Обозначим $\overline{S}_n = \max_{0\le k\le n} S_k, n \ge 1$, $\overline{S} = \sup_{k\ge 0} S_k$. При $x > 0$ и $n \ge 1$ имеем

$$0 \le P(w_{n+1} < x) - P(\overline{S} < x) = P(\overline{S} \ge x) - P(w_{n+1} \ge x) = P(\overline{S}_n < x, \overline{S} \ge x), \tag{11}$$

где использовано решение $P(w_{n+1} \ge x) = P(\overline{S}_n \ge x)$ уравнений (3) при $y = 0$.

Записанная справа в (11) вероятность при каждом x не убывает с ростом n. Далее, при $x > 0$ и $n \ge 1$, по формуле полной вероятности,

$$P(\overline{S}_n < x, \overline{S} \ge x) = \sum_{k>n} P(\overline{S}_{k-1} < x, S_k \ge x) \le \sum_{k>n} P(S_k \ge x).$$

С учетом $\delta = \beta_1 - \alpha_1 > 0$ по неравенству Чебышева при $x > 0$ и $n \ge 1$ имеем

$$P(\overline{S}_n < x, \overline{S} \ge x) \le \frac{1}{\delta^{2+\varepsilon}} \sum_{k>n} \frac{M/\varsigma_k/^{2+\varepsilon}}{\left(k + \left(\frac{x}{\delta}\right)\right)^{2+\varepsilon}}, \tag{12}$$

где обозначено $\varsigma_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$.

По теореме 20, гл. 3, стр. 89 и зад. 31, гл. 3, стр. 98 [4], справедлива оценка

$$M/\varsigma_n/^{2+\varepsilon} \le (1+\varepsilon)(2+(\varepsilon/2))n^{1+(\varepsilon/2)} m_{2+\varepsilon}. \tag{13}$$

Подставив оценку (13) в правую часть неравенства (12), при $x > 0$ и $n \ge 1$ приходим к оценке

$$P(\overline{S}_n < x, \overline{S} \ge x) \le (1+\varepsilon)(2+(\varepsilon/2)) \frac{m_{2+\varepsilon}}{\delta^{2+\varepsilon}} \sum_{k>n} \frac{1}{\left(k + \left(\frac{x}{\delta}\right)\right)^{1+(\varepsilon/2)}}.$$

По интегральному признаку Маклорена–Коши для рядов с положительными членами, последнее неравенство влечет оценку

$$P(\overline{S}_n < x, \overline{S} \geq x) \leq \frac{(1+\varepsilon)(4+\varepsilon)}{\varepsilon\delta^{2+\varepsilon}} \frac{1}{\left(n+\frac{x}{\delta}\right)^{\varepsilon/2}},$$ откуда и из (11) выводим

$$\begin{aligned} &P(w_{n+1}(y) < x) - P(w_{n+1} < x) = P(w_{n+1} \geq x) - P(w_{n+1}(y) \geq x) = \\ &= P(S_n - \min_{0 \leq k \leq n} S_k < x, S_n + y \geq x) \geq -P(x > S_n \geq x - y) \geq -P(S_n \geq x - y). \end{aligned} \tag{14}$$

Отрицательная нижняя оценка (14) – следствие *немонотонности* при фиксированных x и y вероятности $P(w_{n+1}(y) < x)$ по n.

Используя, как и ранее, неравенство Чебышева и оценку (13), при $x > 0$, $y > 0$ и $n \geq 1$ получаем

$$P(\overline{S}_n \geq x - y) \leq (1+\varepsilon)(2+\varepsilon/2)\frac{m_{2+\varepsilon}}{\delta^{2+\varepsilon}} \frac{1}{\left(n+\frac{x-y}{\delta}\right)^{1+\varepsilon/2}},$$

откуда и из (14) выводим (6). Теорема доказана.

Приношу благодарность проф. Э. А. Даниеляну за постановку задачи и ценные указания.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Поступила 29.09.2003

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.** Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
2. **Клейнрок Л.** Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979.
3. **Боровков А.А.** Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
4. **Петров В.В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
5. **Prahbu N.U.** Stochastic Storage Processes. Springer-Verlag, New-York-Heidelberg-Berlin, 1980, v. 15.

Տ. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ GI|G|1|∞ ՄՈԴԵԼՈՒՄ

Ամփոփում

Գտնված է GI|G|1|∞ մոդելում կուտակված և չկատարված հրատապ աշխատանքի այդ մոդելի ստացիոնար համարժեքին զուգամիտելու արագության մի նոր գնահատական: Այն թույլ է տալիս սպասարկող

սարքի գումարային ազատ ժամանակի համար ստանալ նման մի գնահատական, երբ մոդելի ծանրաբեռնվածությունը մեծ է մեկից:

T. A. GRIGORYAN

ON A RATE OF CONVERGENCE IN THE GI|G|1|∞ MODEL

Summary

In the present paper one more estimation on a rate of convergence of actual waiting time to its stationary value in the GI|G|1|∞ model is obtained. It leads to a similar estimation for total empty time of a server when the traffic intensity of the model is more than one.