ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2004 Естественные науки

Математика

УДК 512.57

С. С. ДАВИДОВ

БИНАРНЫЕ ТЕРМЫ И ПОЛУТЕРМЫ

В статье вводится понятие полутерма, с помощью которого представляются элементы абсолютно свободной алгебры. Доказанные результаты применяются для абелевых алгебр.

Зафиксируем произвольное число символов двух сортов $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ и $\{\beta_i | i \in I\}$ (I – непустое множество), которые в дальнейшем будут рассматриваться как унарные символы операции. Свободный моноид над множеством $\{\alpha_i, \beta_i \mid i \in I\}$ будем обозначать через E. Каждый элемент $e \in E$ может быть однозначно выражен в виде $e = \prod_{i=1}^{n} a_i$, где $n \in N$ и $a_i \in \{\alpha_i, \beta_i \mid i \in I\}$ для всех $i = 1,\ldots,n$. Число n будем называть глубиной e и обозначать через $\partial(e)$. Единичный элемент обозначается через 1, для него $\partial(1) = 0$. Для каждого $n \geq 0$ положим $E_n = \{e \in E \mid \partial(e) = n\}$. Положим $\overline{\alpha}_i = \beta_i$ и $\overline{\beta}_i = \alpha_i$ для всех $i \in I$, т.е. отображение $x \mapsto \overline{x}$ является подстановкой множества $\{\alpha_i, \beta_i \mid i \in I\}$.

Введем также два символа α и β, полагая $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$ для всех $i \in I$. Через E' обозначим свободный моноид над множеством $\{\alpha, \beta\}$.

Пусть X – произвольное непустое множество. Через SW_X' обозначим свободную алгебру над X в многообразии алгебр типа (сигнатуры) $\{+; 0; \alpha_i; \beta_i \mid i \in I\}$ (состоящую из одного бинарного, одного нулярного и $2|I|$ унарных символов), определяемую следующими тождествами:

$$(x+y)+z = x+(y+z),$$

$$x+y = y+x,$$

$$x+0 = x,$$

$$\alpha_i(x+y) = \alpha_i x + \alpha_i y \quad \text{для всех} \quad i \in I,$$

$$\beta_i(x+y) = \beta_i x + \beta_i y \quad \text{для всех} \quad i \in I,$$

$$\alpha_i 0 = 0 \text{ для всех } i \in I,$$
$$\beta_i 0 = 0 \text{ для всех } i \in I.$$

Элементы алгебры SW'_x будем называть полутермами над X. Очевидно, что каждый полутерм s может быть выражен в виде

$$s = \sum_{i=1}^{r} e_i x_i ,$$

где $r \in N$, $e_i \in E$ и $x_i \in X$; это выражение однозначно с точностью до порядка слагаемых. Натуральное число r называется длиной s и обозначается через $\lambda(s)$. Ясно, что $\lambda(s) = 0$ тогда и только тогда, когда $s = 0$.

Пусть $s = \sum_{i=1}^{r} e_i x_i$, множество $\{x_i \mid i = 1,...,r\}$ будем обозначать через $\operatorname{var}(s)$, а множество всех $j \in I$, входящих в e_i, $i = 1,...,r$, – через $]s[$. Через $]s^{(k)}[$ обозначим множество индексов элементов α_i, β_i, стоящих на k-ых местах в e_i, $i = 1,...,r$. Например, если $s = \alpha_1\beta_3\alpha_2 x_1 + {}$ $+\alpha_2\beta_1\alpha_5\alpha_6 x_2 + \alpha_3 x_3 + \beta_5\alpha_1\beta_7 x_4$, то

$$\operatorname{var}(s) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$
$$]s[= \{1,2,3,5,6,7\},$$
$$]s^{(1)}[= \{1,2,3,5\},$$
$$]s^{(3)}[= \{2,5,7\} \text{ и т. д.}$$

Пусть $\Sigma = \{X_i \mid i \in I\}$ – множество арифметического типа $T = \{2\}$ [1, 2]. Определим бинарные операции на SW'_x следующим образом:

$$X_i(s,t) = \alpha_i s + \beta_i t \text{ для всех } i \in I.$$

Полученную T-алгебру $< SW'_x, \Sigma >$ будем обозначать через SW_x^{Σ} и называть алгеброй полутермов над парой (X, Σ). Главную подалгебру [1, 2] SW_x^{Σ}, порожденную множеством X, будем обозначать через W_x^{Σ}, а его элементы будем называть термами над (X, Σ).

Предложение 1. W_x^{Σ} – абсолютно свободная алгебра над парой (X, Σ). Для каждого терма t над (X, Σ) имеет место один из следующих случаев:

(1) $t \in X$;

(2) существуют единственные термы u, v над (X, Σ) и $X_i \in \Sigma$, такие, что $t = X_i(u, v)$.

Доказательство очевидно.

Предложение 2. Пусть $t = \sum_{i=1}^{r} e_i x_i$ – полутерм над (X, Σ), удовлетворяющий следующим условиям:

(1) $r \geq 1$;

(2) если $i, j \in \{1,\dots,r\}$ и $e'_i = e'_j f'$ для некоторого $f' \in E'$, то $i = j$;

(3) если $i \in \{1,\dots,r\}$ и $e_i = fag$ для некоторых $f, g \in E$ (возможно равных единице) и $a \in \{\alpha_i, \beta_i\}$ для некоторого $i \in I$, то существует $j \in \{1,\dots,r\}$ с $e_j = f\bar{a}h$ для некоторого $h \in E$. Тогда число элементов множества $\rfloor t^{(k)} \lfloor$ для всех $k \leq \max\limits_{i \in \{1,\dots,r\}} \partial(e_i)$ меньше или равно 2^{k-1}, т. е. $\left\| t^{(k)} \right\| \leq 2^{k-1}$.

Доказательство проводится индукцией по длине терма.

Предложение 3. Пусть $t = \sum\limits_{i=1}^{r} e_i x_i$ – полутерм над (X, Σ). t будет термом над (X, Σ) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим условиям:

(1) $r \geq 1$;

(2) если $i, j \in \{1,\dots,r\}$ и $e'_i = e'_j f'$ для некоторого $f' \in E'$, то $i = j$;

(3) если $i \in \{1,\dots,r\}$ и $e_i = fag$ для некоторых $f, g \in E$ (возможно, равных единице) и $a \in \{\alpha_k, \beta_k\}$ для некоторого $k \in I$, то существует $j \in \{1,\dots,r\}$ с $e_j = f\bar{a}h$ для некоторого $h \in E$.

Доказательство. Рассмотрим множество всех полутермов $t \in SW_x^{\Sigma}$, удовлетворяющих условиям (1)–(3). Легко видеть, что это множество будет подалгеброй SW_x^{Σ}, содержащей X. Поэтому W_x^{Σ} принадлежит подалгебре полутермов, удовлетворяющих условиям (1)–(3).

Покажем обратное, а именно, если t удовлетворяет условиям (1)–(3), то $t \in W_x^{\Sigma}$. Доказательство проведем индукцией по $\lambda(t)$. Пусть $\lambda(t) = 1$, т. е. $t = e_1 x_1$. Если e_1 отлично от единицы, то его можно представить в виде $e_1 = fag$, где $f, g \in E$ и $a \in \{\alpha_k, \beta_k\}$ для некоторого $k \in I$. Согласно (3), t должен содержать коэффициент $f\bar{a}h$ для некоторого $h \in E$, что невозможно, поэтому $t = x_1$, т. е. $t \in W_x^{\Sigma}$. Предположим, что утверждение верно для $\lambda(t) < n$, докажем его для $\lambda(t) = n$. Положим $t = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i x_i$. Согласно предложению 2, первые элементы коэффициентов e_i принадлежат одному индексу $j \in I$. Поэтому t можно представить в виде

$$t = \sum_{i=1}^{k} \alpha_j f_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} \beta_j f_i x_i = \alpha_j \sum_{i=1}^{k} f_i x_i + \beta_j \sum_{i=k+1}^{n} f_i x_i = X_j(t_1, t_2).$$

Полутермы $t_1 = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i$ и $t_2 = \sum\limits_{i=k+1}^{n} f_i x_i$ имеют длину меньше n, и для них выполняются условия (1)–(3), следовательно, по предположению индукции $t_1,t_2 \in W_x^{\Sigma}$, поэтому $t \in W_x^{\Sigma}$. Предложение доказано.

Пусть $t=\sum_{i=1}^{r} e_i x_i$ – терм. Множество $\{e_i \mid i=1,\dots,r\}$ обозначим через $I^*(t)$, множество $\{e \in E \mid ef \in I^*(t)$ для некоторого $f \in E\}$ – через $I(t)$. Для каждого $n \geq 0$ положим $I_n(t)=E_n \bigcap I(t)$. Очевидно $I^*(t) \subseteq I(t)$. Более того, если $e \in I(t)$, то $e \in I^*(t)$ тогда и только тогда, когда $e\alpha_i \notin I(t)$ тогда и только тогда, когда $\alpha\beta_i \notin I(t)$ для некоторого $i \in I$. Глубиной терма t назовем число $\partial(t)=\max\{\partial(e) \mid e \in I(t)\}$. Ясно, что $\partial(t)$ есть наибольшее целое число n, такое, что $I_n(t) \neq \varnothing$ и $I_{\partial(t)}(t) \subseteq I^*(t)$.

Предложение 4. Пусть t – терм над (X,Σ) и $e \in I(t)$. Тогда существует единственная пара (w,u), такая, что w – полутерм, u – терм и $t=w+eu$. Более того, если v – произвольный терм над (X,Σ), то $w+ev$ также будет термом над (X,Σ).

Доказательство. Положим $t=\sum_{i=1}^{r} e_i x_i$, где $x_i \in X$. Обозначим через J множество всех $j \in \{1,\dots,r\}$, таких, что $e_j = ef$ для некоторого $f \in E$, т. е. это множество индексов тех коэффициентов терма t, которые начинаются с e. Для каждого $j \in J$ определим f_j следующим образом: $e_j = ef_j$.

Положим $u=\sum_{j \in J} f_j x_j$, $w=\sum_{j \notin J} e_j x_j$. Тогда будем иметь

$$t=w+eu=\sum_{j \notin J} e_j x_j + e\sum_{j \in J} f_j x_j = \sum_{j \notin J} e_j x_j + \sum_{j \in J} ef_j x_j = \sum_{j \notin J} e_j x_j + \sum_{j \in J} e_j x_j = \sum_{i=1}^{r} e_i x_i.$$

То, что u – терм, следует из условий (1)–(3) предложения 3.

Покажем теперь единственность. Предположим, что $t=w_0+eu_0$, где $w_0 \in SW_X^{\Sigma}$ и $u_0 \in W_X^{\Sigma}$. Предположим, что $e_i x_i$ является слагаемым в w_0 для некоторого $i \in J$. Возьмем $f \in E$ максимальной глубины, такой, что для некоторых $g,h \in E$ и $x,y \in X$ $efgx$ – слагаемое в w_0 и $efhy$ – слагаемое в eu_0 (это возможно, т.к., по нашему предположению, $e_i x_i = ef_i x_i$ – слагаемое в w_0, а все слагаемые в eu_0 начинаются с e). Отметим, что g и h не могут быть равны 1, поэтому $g=ag_0$, $h=bh_0$, где $a,b \in \{\alpha_i,\beta_i \mid i \in I\}$, и $a \neq b$ ввиду максимальности глубины f. Для a и b возможно несколько случаев:

(а) $a=\alpha_k$, $b=\beta_k$. В этом случае имеем $ef\alpha_k g_0 x$ – слагаемое в w_0, а $ef\beta_k h_0 y$ – слагаемое в eu_0; т. к. u_0 – терм, то $f\alpha_k h_1$ входит в него как слагаемое (согласно предложению 3(3)), т. е. $ef\alpha_k h_1$ – слагаемое в eu_0. Это противоречит выбору f, а именно, мы нашли более длинный элемент $f\alpha_k$, удовлетворяющий требуемым условиям:

(b) $a=\beta_k$, $b=\alpha_k$ рассматривается двойственным образом;

(c) $a=\alpha_k$, $b=\alpha_s$.

Имеем $ef\alpha_k g_0 x \in w_0$, $ef\alpha_s h_0 y \in u_0$. В этом случае g_0 и h_0 отличны от 1, т. к. в противном случае нарушилось бы условие предложения 3(2). Рассмотрим опять несколько вариантов:

(c_1) $g_0=\alpha_n g_1$, $h_0=\beta_m h_1$. Имеем $ef\alpha_k\alpha_n g_1 x \in w_0$, $ef\alpha_s\beta_m h_1 y \in eu_0$. Т. к. u_0 – терм, то $ef\alpha_s\alpha_m h_1' \in eu_0$, и мы опять имеем g_1 и h_1', не равные единице по тем же причинам, что и выше. Процесс не может продолжаться до бесконечности, т. к. коэффициенты имеют конечную длину. Противоречие.

(c_2) $g_0=\alpha_n g_1$, $h_0=\beta_n h_1$ аналогично (c_1).

(c_3) $g_0=\alpha_n g_1$, $h_0=\alpha_m h_1$, тогда $ef\alpha_k\alpha_n g_1 x \in w_0$, $ef\alpha_s\alpha_m h_1 y \in eu_0$ аналогично (c_1).

(c_4) $g_0=\beta_n g_1$, $h_0=\beta_m h_1$ двойственно (c_3).

(c_5) $g_0=\beta_n g_1$, $h_0=\alpha_m h_1$ двойственно (c_1).

Таким образом, в случае (c) опять приходим к противоречию.

(d) $a=\beta_k$, $b=\beta_s$ рассматривается двойственным образом по отношению к (c).

(e) $a=\alpha_k$, $b=\beta_s$.

Тогда $ef\alpha_k g_0 x \in w_0$, $ef\beta_s h_0 y \in eu_0$. Поскольку u_0 – терм, то $ef\alpha_s h_0 y \in eu_0$, и далее продолжаем, как и в случае (c).

(f) $a=\beta_s$, $b=\alpha_s$ двойственно (e).

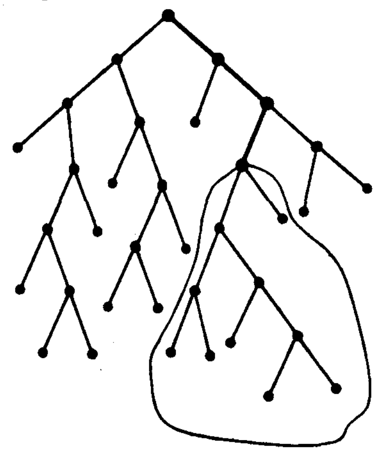
Таким образом, предположив, что $e_i x_i$ слагаемое в w_0, мы пришли к противоречию, поэтому все $e_i x_i$ входят в $e_i u_0$ для всех $i \in J$, следовательно, $u=u_0$. Теперь равенство $w=w_0$ очевидно.

Для завершения доказательства остается показать, что $t_1=w+ev$ будет термом для любого терма v. Пусть $v=\sum_{i=1}^{k} h_i x_i$, тогда $t_1=\sum_{i \notin J} e_i x_i +$ $+e\sum_{i=1}^{k} h_i x_i = \sum_{i \notin J} e_i x_i + \sum_{i=1}^{k} eh_i x_i$.

Ни один из коэффициентов e_i не начинается с e и, следовательно, ни один из коэффициентов eh_i не может быть начальным отрезком коэффициента в $\sum_{i \notin J} e_i x_i$ и наоборот. Т. о. для t_1 выполняется условие (2) предложения 3, т. к. в противном случае оно нарушилось бы для термов t и v. Проверим условие (3) этого же предложения. Пусть

fah – некоторый коэффициент в t_1. Если он входит в $\sum_{i \notin J} e_i x_i$, то по построению $w+eu$ элемент $f\bar{a}h_1$ должен входить в $\sum_{i \notin J} e_i x_i$. Если fah входит в $\sum_{i=1}^{k} eh_i x_i$, то $f=ef_1$ и $f_1 ah$ входят в $\sum_{i=1}^{k} h_i x_i$, и т. к. он терм, то в него входит $f_1\bar{a}h_1$, т. о. $ef_1\bar{a}h_1 = f\bar{a}h_1$ входит в $\sum_{i=1}^{k} eh_i x_i$. Следовательно, $t_1 = w+ev$ будет термом. Предложение доказано.

Терм можно рассмотреть в виде графа, представляющего собой дерево, корнем которого станет первое вхождение функциональной переменной, и из любой его вершины выходят два ребра (если рассматривать термы арифметического типа $\{2\}$), а всякий путь из корня оканчивается на вершинах, которым соответствуют предметные переменные. Утверждение предложения 4 наглядно представлено на графе терма. Если мы возьмем какой-нибудь начальный отрезок (путь) в графе терма (в данном примере он обведен жирной линией), то элементы терма, имеющие такой начальный отрезок в своих коэффициентах будут составлять поддерево этого графа (обведен кривой линией), т. е. само оно является графом некоторого терма. Остальная часть дерева не является графом никакого терма. Кроме того, если мы вместо обведенной части дерева подставим другое дерево (граф другого терма), то получившееся дерево опять сохранит свою структуру, т. е. будет являться графом некоторого терма.



Пусть $t = w+eu$ – терм, тогда терм u будем обозначать через $t_{[E]} = u$ и называть подтермом терма t, соответствующим e. Ясно, что $t_{[E]} \in X$ тогда и только тогда, когда $e \in I^*(t)$. Если $t = \sum_{i=1}^{r} e_i x_i$, то $t_{[e_i]} = x_i$ для всех $i = 1,\dots,r$. Терм $w+ev$ будем обозначать через $\sigma_{e:v}(t)$.

Предложение 5. Пусть t, v – два терма над (X,Σ), $n \geq 0$, $e \in I_n(t)$, и положим $S = \sigma_{e:v}(t)$. Тогда

(1) $I_m(s) = I_m(t)$ для всех $m \in \{0,\dots,n\}$;

(2) $s_{[e]} = v$;

(3) если $f \in I_n(t)$ и $f \neq e$, то $s_{[f]} = t_{[f]}$;

(4) если $0 \leq m < n$, $x \in X$ и $g \in I_m(t)$, то $t_{[g]} = x$ тогда и только тогда, когда $s_{[g]} = x$.

Доказательство.

(1). Имеем $s = w + ev$, $t = w + eu$, и поскольку $m \le n$, то в слагаемых ev и eu начальные отрезки длины m совпадают, т. к. $\partial(e) = n$, а w у них общее. Поэтому $I_m(s) = I_m(t)$.

(2). Очевидно.

(3). Т. к. $f \ne e$ и $\partial(f) = \partial(l) = n$, то f не может быть начальным отрезком коэффициента в ev и eu, т. е. он начальный отрезок коэффициента, входящего в w, и поэтому $s_{[f]}$ и $t_{[f]}$ будут состоять из одинаковых слагаемых.

(4). Т. к. $g \in I_m(t)$ и $t_{[g]} = x$, то g является коэффициентом, входящим в w, и поскольку $m < n$, а у s и t w – общее, то $s_{[g]} = x$. Аналогично обратное. Предложение доказано.

Пусть t – терм над (X, Σ) и $e_1, ..., e_k \in I(t)$, такие, что если $i, j \in \{1, ..., k\}$ и $e_i = e_j f$ для некоторго $f \in E$, то $i = j$. Другими словами, ни один e_i не может быть начальным отрезком для другого e_j. Такую систему $e_1, ..., e_k$ будем называть независимой. Тогда из доказательства предложения 4 будет следовать, что существуют единственные $w, u_1, ..., u_k$, такие, что w – полутерм, $u_1, ..., u_k$ – термы и $t = w + e_1 u_1 + ... + e_k u_k$. Имеем $t_{[e_1]} = u_1, ..., t_{[e_k]} = u_k$. Если $v_1, ..., v_k$ – произвольные термы, тогда $w + e_1 v_1 + ... + e_k v_k$ – терм, который будем обозначать через $\sigma_{e_1 : v_1} ... \sigma_{e_k : v_k}(t)$.

Пусть t – терм, $n \ge 0$ и p – подстановка $I_n(t)$. Обозначим через $e_1, ..., e_k$ (попарно различные) элементы $I_n(t)$. Очевидно, они удовлетворяют условию, описанному выше. Терм $\sigma_{e_1 : v_1} ... \sigma_{e_k : v_k}(t)$, где $v_i = t_{[p(e_i)]}$ для всех $i = 1, ..., k$, обозначим через $p[t]$.

Предложение 6. Пусть t – терм над (X, Σ), $n \ge 0$, и пусть p – подстановка $I_n(t)$. Тогда

(1) $I_m(p[t]) = I_m(t)$ для всех $m \in \{0, ..., n\}$;

(2) если $e \in I_n(t)$, то $p[t]_{[e]} = t_{[p(e)]}$;

(3) если $0 \le m < n$, $x \in X$ и $e \in I_m(t)$, то $t_{[e]} = x$ тогда и только тогда, когда $p[t]_{[e]} = x$.

Доказательство. Следует из предложения 5.

Пусть $n \in N$, $t_0, t_1, ..., t_n$ – термы над (X, Σ) и $a_1, ..., a_n$ – некоторые элементы из $\{\alpha_i, \beta_i \mid i \in I\}$. Определим терм $[t_0, a_1, t_1, ..., a_n, t_n]$ индукцией по n следующим образом: $[t_0] = t_0$; $[t_0, a_1, t_1, ..., a_{n+1}, t_{n+1}] = X_i([t_0, a_1, t_1, ..., a_n, t_n], t_{n+1})$, если $a_{n+1} = \alpha_i$, и $[t_0, a_1, t_1, ..., a_{n+1}, t_{n+1}] = X_i(t_{n+1}, [t_0, a_1, t_1, ..., a_n, t_n])$, если $a_{n+1} = \beta_i$.

Предложение 7. Пусть t – терм над (X,Σ) и $e=a_1...a_n\in I_n(t)$ $(n\geq 0)$. Тогда

(1) $t=\lfloor t_{[e]},a_n,t_{[a_1...a_{n-1}\bar{a}_n]},a_{n-1},t_{[a_1...a_{n-2}\bar{a}_{n-1}]},...,a_1,t_{[\bar{a}_1]}\rfloor$;

(2) если v – терм над (X,Σ), то $\sigma_{e:v}(t)=\lfloor v,a_n,t_{[a_1...a_{n-1}\bar{a}_n]},...,a_1,t_{[\bar{a}_1]}\rfloor$.

Доказательство.

(1). Индукцией по $\lambda(t)$. Предположим, утверждение верно для $\lambda(t)<m$, докажем его для $\lambda(t)=m$. Т. к. t – терм, то существуют $X_i\in\Sigma$ и $u,v\in W_X^\Sigma$, такие, что $t=X_i(u,v)=\alpha_i u+\beta_i v$. Длина термов u,v меньше m. Пусть $e=a_1...a_n\in I_n(t)$, тогда $a_1=\alpha_i$ или $a_1=\beta_i$. Рассмотрим случай $a_1=\alpha_i$, тогда $a_2...a_n\in I_{n-1}(u)$, т. к. $\alpha_i a_2...a_n$ – коэффициент в $\alpha_i u$ и $t=[u,a_1,v]$. Имеем $v=t_{[\beta_i]}=t_{[\bar{\alpha}_i]}=t_{[\bar{a}_1]}$ и по предположению индукции $u=\lfloor u_{[a_2...a_n]},a_n,u_{[a_2...\bar{a}_n]},a_{n-1},...,a_2,u_{[\bar{a}_2]}\rfloor$. Поэтому

$$t=X_i(u,v)=X_i(\lfloor u_{[a_2...a_n]},a_n,u_{[a_2...\bar{a}_n]},a_{n-1},...,a_2,u_{[\bar{a}_2]}\rfloor,t_{[\bar{a}_1]})=$$
$$=\lfloor u_{[a_2...a_n]},a_n,u_{[a_2...\bar{a}_n]},a_{n-1},...,a_2,u_{[\bar{a}_2]},a_1,t_{[\bar{a}_1]}\rfloor.$$

Теперь легко видеть, что $u_{[a_2...a_n]}=t_{[a_1a_2...a_n]}$ $u_{[a_2...\bar{a}_n]}=t_{[a_1a_2...\bar{a}_n]},...,u_{[\bar{a}_2]}=$ $=t_{[a_1\bar{a}_2]}$. Аналогично рассматривается случай $a_1=\beta_i$.

(2). Следует из (1). Предложение доказано.

Если $e=a_1...a_n\in E$, то упорядоченная пара $(|\{i\mid a_i=\alpha_j\}|,|\{i\mid a_i=\beta_j\}|)$ называется j-весом e, а кортеж упорядоченных пар $((k_1,l_1),...,(k_i,l_i),...)$ – Σ-весом e, где (k_i,l_i) – i-вес e.

Обозначим через $P_{((k_1,l_1),...,(k_i,l_i),...)}(x,t)$ число коэффициентов терма t при переменной x, имеющих Σ-вес $((k_1,l_1),...,(k_i,l_i),...)$. Определим бинарное отношение R_X^Σ на W_X^Σ следующим образом:

$(u,v)\in R_X^\Sigma$ тогда и только тогда, когда $P_{((k_1,l_1),...,(k_i,l_i),...)}(x,u)=$ $=P_{((k_1,l_1),...,(k_i,l_i),...)}(x,v)$ для всех $x\in X$ и всех (k_i,l_i), $i\in I$.

Пусть M_X^Σ – множество всех сверхтождеств, выполняющихся во всех сократимых бинарных абелевых алгебрах. Тогда при помощи вышеизложенных результатов можно доказать следующую теорему.

Теорема. R_X^Σ – вполне инвариантная конгруэнция алгебры W_X^Σ, и $M_X^\Sigma\subseteq R_X^\Sigma$.

Кафедра высшей алгебры и геометрии ***Поступила 26.04.2003***

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мовсисян Ю.М. Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1986.**

2. **Movsisyan Yu.M.** – Sci. Math. Jap., 2001, v. 54, № 3, p. 595–640.

Ս. Ս. ԴԱՎԻԴՈՎ

ԵՐԿՍԵՂ ԹԵՐՄԵՐ ԵՎ ԿԻՍԱԹԵՐՄԵՐ

Ամփոփում

Հոդվածում ներմուծվում է կիսաթերմի գաղափարը, որի միջոցով ներկայացվում են ազատ հանրահաշվի տարրերը: Ստացված արդյունքները կիրառվում են աբելյան հանրահաշիվների դեպքում:

S. S. DAVIDOV

BINARY TERMS AND SEMITERMS

Summary

In the present paper we give a new construction of absolutely free binary algebra, the elements of which are called semiterms. These results are applied for abelian algebras.