ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2004 Естественные науки

Физика

УДК 13.3

Д. М. СЕДРАКЯН, А. Ж. ХАЧАТРЯН, Н. М. ИСПИРЯН, Ю. Н. АЙРАПЕТЯН

ПРОПУСКАНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, ПАДАЮЩЕЙ НАКЛОННО НА ИДЕАЛЬНУЮ СТРУКТУРУ

В данной работе нами исследуется поведение зон пропускания и отражения плоской электромагнитной волны, падающей наклонно на идеальную слоистую структуру в зависимости от ее параметров и угла падения волны. Найдено условие, при котором возможно соприкосновение зон пропускания. Данное условие имеет один и тот же вид как для случая s-волн, так и для p-волн. Показано, что в точках соприкосновения зон коэффициент прохождения волны равен единице.

Введение. Рассматривается прохождения плоской электромагнитной волны, падающей наклонно на идеальную периодическую структуру. В частности, мы исследуем поведение зон отражения и прохождения волны для структуры, представляющей собой периодическое повторение одного однородного слоя в пространстве в зависимости от ее параметров (показатель преломления слоя, его толщина, расстояния между слоями), а также в зависимости от угла падения волны. На наш взгляд, данная постановка задачи имеет помимо физического и практический интерес. Так, в частности, она позволяет проследить динамику изменения характера пропускания периодической системы при изменении одного из ее параметров (напр., изменение показателя преломления слоя в зависимости от его состава), а также по необходимости прогнозировать структуры с наперед заданными спектральными характеристиками.

Некоторые представленные ниже выводы являются обобщением результатов [1], полученных для задачи движения электрона в бесконечном и периодическом с обеих сторон одномерном поле, которое состоит из прямоугольных потенциальных барьеров.

Уравнения, определяющие границы четных и нечетных зон пропускания. Обсуждаемая задача хорошо известна, а ее решение можно встретить во многих учебниках по оптике (см., напр., [2, 3]). Поэтому, мы ограничимся только ее постановкой и приведением окончательного результата.

Рассмотрим задачу определения коэффициента прохождения плоской монохроматичной электромагнитной волны, падающей наклонно на идеальную слоистую структуру, представляющую собой периодическое повторение одного однородного слоя в пространстве. Диэлектрическая проницаемость для рассматриваемой структуры может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon(z) &= \varepsilon_0\theta(-z) + \sum_{n=1}^{N}\varepsilon\theta(z-(n-1)a)\theta((n-1)a+d-z) + \\ &+ \sum_{n=1}^{N-1}\varepsilon_0\theta(z-((n-1)a+d))\theta(na-z) + \varepsilon_0\theta(z-L),\end{aligned} \tag{1}$$

где a является периодом структуры, ε – диэлектрическая постоянная одного слоя, d – его ширина и $L=(N-1)a-d$. Далее мы будем предполагать, что магнитная проницаемость слоев $\mu=1$.

Выберем в качестве единичных базисных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Пусть волновой вектор плоской волны, падающей на слоистую структуру (1) из первой полубесконечной среды $(z<0)$, расположен в плоскости (x,z). Тогда, рассматривая электрическую компоненту поля как реальную часть комплексного вектора $\vec{E}\exp\{-i\omega t\}$, пространственную зависимость вектора $\vec{E}$ можем записать в виде

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases}\vec{E}_0\exp\{i\vec{k}_0\vec{r}\} + \vec{E}_r\exp\{i\vec{k}_r\vec{r}\},\ z<0,\\ \vec{E}_t\exp\{i\vec{k}_0\vec{r}\},\ z>L,\end{cases} \tag{2}$$

где $\left|\vec{k}_0\right| = \left|\vec{k}_r\right| = k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0}/c$ и

$$\vec{k}_0 = k_0\sin\alpha\,\vec{e}_1 + k_0\cos\alpha\,\vec{e}_3,\quad \vec{k}_r = k_0\sin\alpha\,\vec{e}_1 - k_0\cos\alpha\,\vec{e}_3. \tag{3}$$

Как известно, произвольно поляризованная плоская волна представляется как суперпозиция так называемых s- и p-поляризованных волн. Основным свойством этих волн является то, что они не меняют своей поляризации при рассеянии на слое. Для s-волны вектор электрического поля находится в плоскости слоя. В случае p-волны электрический вектор расположен в плоскости падения, соответственно магнитная компонента параллельна плоскости слоя. $\left|T_N^s\right|^2$ и $\left|T_N^p\right|^2$ – коэффициенты прохождения s- и p-волн для идеальной структуры (1) и могут быть представлены следующим образом [4] (см. также [5]):

$$\left|T_N^{s,p}\right| = \frac{\sin^2\beta^{s,p}/\sin^2 N\beta^{s,p}}{\left|r^{s,p}/t^{s,p}\right|^2 + \sin^2\beta^{s,p}/\sin^2 N\beta^{s,p}}, \tag{4}$$

где $r^{s,p}$ и $t^{s,p}$ являются амплитудами отражения и прохождения s- и

p-волн для одного слоя. В выражении (4) параметр $\beta^{s,p}$, который может принимать как действительное, так и мнимое значение, определяет характер прохождения волны через периодическую структуру: $\cos\beta^{s,p} = \mathrm{Re}(\exp\{-ik_0 a\cos\alpha\}/t^{s,p})$. В случае действительного $\beta^{s,p}$ прохождение волны через структуру имеет место при любом N. При мнимых значениях $\beta^{s,p}$ увеличение N приводит к полному отражению волны. Для s- и p-волн параметр $\beta^{s,p}$ определяется согласно следующим формулам:

$$\cos\beta^s = \cos\{k_{0z}b\}\cos\{k_z d\} - \frac{k_{0z}^2 + k_z^2}{2k_{0z}k_z}\sin\{k_{0z}b\}\sin\{k_z d\}, \tag{5}$$

$$\cos\beta^p = \cos\{k_{0z}b\}\cos\{k_z d\} - \frac{(\varepsilon/\varepsilon_0)k_{0z}^2 + (\varepsilon_0/\varepsilon)k_z^2}{2k_{0z}k_z}\sin\{k_{0z}b\}\sin\{k_z d\}. \tag{6}$$

В выражениях (5), (6) введены обозначения $b = a - d$, $k_{0z} = k_0\cos\alpha$, $k_z = \omega\cos\gamma\sqrt{\varepsilon}/c$. Заметим, что, согласно закону Снеллиуса, между углом падения α и углом преломления волны в слое γ существует связь $\sqrt{\varepsilon_0}\sin\alpha = \sqrt{\varepsilon}\sin\gamma$. Вследствие этого, когда α больше предельного угла полного отражения $\alpha' = \arcsin\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$, k_z должно быть заменено величиной $k_z = iq_z$ (q_z – реальная величина), что в свою очередь предполагает аналитическое продолжение формул (5), (6).

Уравнения, определяющие границы нечетных и четных зон отражения, согласно (4)–(6), имеют вид

$$\cos\beta^{s,p} = 1 \text{ и } \cos\beta^{s,p} = -1. \tag{7}$$

Легко показать, что как для случая s-, так и для p-волн каждое из уравнений (7) распадается на два независимых друг от друга уравнения. Используя равенства (5), (6), запишем уравнения (7) через половинные углы $k_{0z}b/2$ и $k_z d/2$. Для s-волн имеем, что (5), (6) равносильны следующим двум уравнениям соответственно:

$$tg^2(k_{0z}b/2) + tg^2(k_z d/2) + \frac{k_{0z}^2 + k_z^2}{k_{0z}k_z} tg(k_{0z}b/2) tg(k_z d/2) = 0, \tag{8}$$

$$ctg^2(k_{0z}b/2) + tg^2(k_z d/2) - \frac{k_{0z}^2 + k_z^2}{k_{0z}k_z} ctg(k_{0z}b/2) tg(k_z d/2) = 0. \tag{9}$$

Для случая p-волн уравнения (5), (6) запишутся в виде

$$tg^2(k_{0z}b/2) + tg^2(k_z d/2) + \frac{(\varepsilon/\varepsilon_0)k_{0z}^2 + (\varepsilon_0/\varepsilon)k_z^2}{k_{0z}k_z} tg(k_{0z}b/2) tg(k_z d/2) = 0, \tag{10}$$

$$ctg^2(k_{0z}b/2) + tg^2(k_z d/2) - \frac{(\varepsilon/\varepsilon_0)k_{0z}^2 + (\varepsilon_0/\varepsilon)k_z^2}{k_{0z}k_z} ctg(k_{0z}b/2) tg(k_z d/2) = 0. \tag{11}$$

Рассматривая полученные уравнения (8)–(11) как квадратичные относительно переменной $tg(k_{0z}d/2)$, легко видим, что каждое из них равносильно двум. Согласно (8), (9), спектральные уравнения, определяющие границы зон отражения для s-волны, могут рассматриваться в виде

$$tg(k_{0z}b/2) = -\frac{k_{0z}}{k_z} tg(k_z d/2), \quad tg(k_{0z}b/2) = -\frac{k_z}{k_{0z}} tg(k_z d/2), \tag{12}$$

$$tg(k_{0z}b/2) = \frac{k_{0z}}{k_z} ctg(k_z d/2), \quad tg(k_{0z}b/2) = \frac{k_z}{k_{0z}} ctg(k_z d/2). \tag{13}$$

Для нахождения зон отражения p-волн из уравнений (10), (11) получаем следующие уравнения:

$$tg(k_{0z}b/2) = -\frac{\varepsilon k_{0z}}{\varepsilon_0 k_z} tg(k_z d/2), \quad tg(k_{0z}b/2) = -\frac{\varepsilon_0 k_z}{\varepsilon k_{0z}} tg(k_z d/2), \tag{14}$$

$$tg(k_{0z}b/2) = \frac{\varepsilon k_{0z}}{\varepsilon_0 k_z} ctg(k_z d/2), \quad tg(k_{0z}b/2) = \frac{\varepsilon_0 k_z}{\varepsilon k_{0z}} ctg(k_z d/2). \tag{15}$$

Когда угол падения волны превышает предельный угол полного отражения, в уравнениях, определяющих спектр пропускания волны, величина k_z должна рассматриваться как мнимая ($k_z = iq_z$). Аналитическое продолжение уравнений (12), (13) на мнимую ось дает следующие соотношения:

$$tg(k_{0z}b/2) = -\frac{k_{0z}}{q_z} th(q_z d/2), \quad tg(k_{0z}b/2) = \frac{q_z}{k_{0z}} th(q_z d/2), \tag{16}$$

$$tg(k_{0z}b/2) = -\frac{k_{0z}}{q_z} cth(q_z d/2), \quad tg(k_{0z}b/2) = \frac{q_z}{k_{0z}} cth(q_z d/2). \tag{17}$$

Аналогично при замене $k_z = iq_z$ для уравнений (14), (15) имеем

$$tg(k_{0z}b/2) = -\frac{\varepsilon k_{0z}}{\varepsilon_0 q_z} th(q_z d/2), \quad tg(k_{0z}b/2) = \frac{\varepsilon_0 q_z}{\varepsilon k_{0z}} th(q_z d/2), \tag{18}$$

$$tg(k_{0z}b/2) = -\frac{\varepsilon k_{0z}}{\varepsilon_0 q_z} cth(q_z d/2), \quad tg(k_{0z}b/2) = \frac{\varepsilon_0 q_z}{\varepsilon_0 k_{0z}} cth(q_z d/2). \tag{19}$$

Интересно отметить, что для значений угла падения, бóльших предельного, при увеличении толщины слоев d ($q_z d \gg 1$) уравнения, определяющие границы нечетных и четных зон отражения как для случая s-волн, так и для p-волн, переходят друг в друга. Действительно, в уравнениях (16)–(19) при выполнении условия $q_z d \gg 1$ можно положить $th(q_z d/2) \approx \approx cth(q_z d/2) \approx 1$. Поэтому для данного случая четверка уравнений – (16), (17) и (18), (19) – переходит в следующую пару уравнений:

$$tg(k_{0z}b/2) = -\frac{k_{0z}}{q_z}, \quad tg(k_{0z}b/2) = \frac{q_z}{k_{0z}}, \tag{20}$$

$$tg(k_{0z}b/2) = -\frac{\varepsilon k_{0z}}{\varepsilon_0 q_z}, \quad tg(k_{0z}b/2) = \frac{\varepsilon_0 q_z}{\varepsilon k_{0z}}. \tag{21}$$

Заметим, что уравнения (20), (21) определяют спектр частот симметричных и антисимметричных мод s- и p-поляризованных волн, распространяющихся в волноводном режиме внутри однородного слоя с диэлектрической проницаемостью ε_0 и толщиной b, когда диэлектрическая проницаемость слева и справа от слоя равна ε. Данный результат легко понять, если вспомнить, что условие $\left|\cos\beta^{s,p}\right| \le 1$ определяет не только зоны пропускания волны для идеальной структуры конечных размеров, но также дает область значений частот волн, способных без затухания существовать внутри бесконечной с обеих сторон идеальной структуры. При условии полного внутреннего отражения волны на границе раздела слоев с диэлектрическими проницаемостями ε_0 и ε ($\varepsilon_0 > \varepsilon$) энергия волны в основном сосредоточена внутри оптически более плотных слоев. По мере увеличения ширины последних степень перекрытия полей, сосредоточенных внутри оптически менее плотных средах, убывает. Вследствие этого вся картина поля, существующая внутри идеальной бесконечной структуры, представляет собой бесконечное число отдельных не перекрывающихся друг с другом волн, каждая из которых распространяется внутри оптически более плотных слоев в волноводном режиме.

Эффект соприкосновения зон. В данной части работы мы обсудим эффект соприкосновения зон прохождения, о чем говорилось выше. Прежде всего заметим, соприкосновение зон прохождения означает, что в данной точке ширина запрещенной зоны стала равной нулю, т. е. ее границы сошлись в одну точку. Как было показано выше, каждое из уравнений (7), решения которых определяют сразу обе границы зон отражения, равносильно двум уравнениям, определяющим только одну из них. Напр., первое уравнение (7) в случае s-волны равносильно двум уравнениям (12). В зависимости от выбора значений параметров задачи каждое из полученных уравнений может определять как верхнюю, так и нижнюю границы зоны отражения. Причем переход нижней границы зоны отражения в верхнюю и, соответственно, верхней – в нижнюю происходит всякий раз, когда имеет место соприкосновение разрешенных зон.

Условие, когда обе границы запрещенной зоны совпадают, означает одновременное выполнение уравнений, определяющих ее границы. Согласно (12), (13) и (14), (15), как для s-, так и для p-волны это условие выражается в виде двух равенств

$$k_{0z}b = n\pi \quad \text{и} \quad k_z d = m\pi, \tag{22}$$

где n, m целые числа и нумеруют очередность зон.

Из (22), в частности, следует, что соприкосновение зон возможно лишь тогда, когда между параметрами задачи существует следующая связь

$$\sin^2\alpha = \frac{d^2n^2\varepsilon - b^2m^2\varepsilon_0}{\varepsilon_0(d^2n^2 - b^2m^2)}. \qquad (23)$$

Отсюда вытекает, что при фиксированных значениях параметров структуры ε_0, ε, d, b должны рассматриваться только те целочисленные значения n, m, при которых значение $\sin^2\alpha$ получается больше нуля и меньше единицы. Так, напр., при выборе $n = 1$ это условие выполняется для всех $m \geq 3$.

Из первого равенства (22) видно, что соприкосновение происходит при частоте

$$\omega = \frac{\pi n c}{b\sqrt{\varepsilon_0}\cos\{\alpha\}}. \qquad (24)$$

Заметим, что при заданных параметрах периодической структуры в (24) $\cos\alpha$ должна определяться из условия (22), т. е. частота соприкосновения зон зависит от всех параметров задачи, а не только от параметров ε, d, как это может показаться на первый взгляд.

Для того чтобы понять, к каким физическим последствиям может привести эффект соприкосновения зон, мы исследуем поведение коэффициента пропускания (4) на границах разрешенных зон в точках их соприкосновения. Необходимо сразу отметить, что точка соприкосновения не может рассматриваться граничной точкой ни для одной граничной зоны. При соприкосновении мы имеем одну большую разрешенную зону, получающуюся из двух, для которой точка соприкосновения является внутренней.

Из общей теории распространения волн в периодической системе известно, что на границах разрешенных зон увеличение длины системы ведет к полному отражению волны. Для рассматриваемой нами структуры на границах разрешенных зон коэффициент прохождения выглядит следующим образом [4, 6]:

$$\left|T_N^{s,p}\right| = \frac{1}{1 + N^2\left|r^{s,p}/t^{s,p}\right|^2}. \qquad (25)$$

Выражение (25) однозначно стремится к нулю при увеличении N, если только на краю запрещенной зоны $r^{s,p} \neq 0$. При $r^{s,p} = 0$ для любого N коэффициент пропускания равен единице. Напомним, что при $k_z d = m\pi$ амплитуды отражения как для s-, так и для p-волн равны нулю ($r^{s,p} = 0$). С дугой стороны, согласно (22), равенство $k_z d = m\pi$ совместно с $k_{0z} b = n\pi$ определяет условие соприкосновения зон. Отсюда легко заключить, что в точках соприкосновения зон периодическая структура становится абсолютно прозрачной для плоской волны вне зависимости от ее поляризации.

Хорошо известен аналогичный эффект полной прозрачности исключительно для волн с p-поляризацией, когда угол падения волны равен углу Брюстера [4, 6]. В этом случае $r^s = 0$. То, что при условии Брюстера разрешенные зоны должны соприкасаться, легко показать из уравнений (14) и (15), определяющих границы для зон p-волн. Действительно, данные уравнения дают совпадающие решения не только при выполнении условия (22), но и при условии

$$\frac{k_{0x}\varepsilon}{k_x\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 k_x}{k_{0x}\varepsilon}. \tag{26}$$

При использовании закона Снеллуса легко убедиться, что (26) есть не что иное, как закон Брюстера ($tg\alpha = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$).

Таким образом, если при падении волны под углом Брюстера периодическая система оказывается прозрачной для p-волны при произвольной ее частоте, то в нашем случае структура оказывается прозрачной для волны произвольной поляризации, и при определенном угле падения она может иметь определенную частоту.

ЕГУ, ГИУА

Поступила 30.09.2003

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хачатрян А.Ж., Седракян Д.М.** – Изв. НАН Армении, Физика, 2003, т. 38, с. 211.
2. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Наука, 1964.
3. **Abeles F.** – Ann. Phys., 1950, v. 5, pp. 596 and 706.
4. **Ярив А., Юх П.** Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987.
5. **Sedrakian D. M., Gevorgyan A.H., Khachatrian A.Zh.** – Opt. Commun., 2001, v. 192, p. 135.
6. **Yariv A., Yen P.** – JOSA, 1997, v. 61, p. 438 and v. 67, p. 423.

Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Ա. Ժ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Ն. Մ. ԻՍՊԻՐՅԱՆ, Յու. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

ԹԵՔ ԸՆԿՆՈՂ ՀԱՐԹ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԱԼԻՔԻ ԱՆՑՈՒՄԸ ԵՎ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՈՒՄԸ ԻԴԵԱԼԱԿԱՆ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում հետազոտված է իդեալական կառուցվածքի վրա թեք ընկնող հարթ էլեկտրամագնիսական ալիքի անցման և անդրադարձման գոտիների կախումը կառուցվածքի պարամետրերից և անկման անկյունից: Գտնված է պայման, որի դեպքում տեղի ունի գոտիների հպում: Այդ պայմանը ունի միևնույն տեսքը ինչպես s-, այնպես էլ p-ալիքների համար: Ցույց է տրված, որ գոտիների հպման կետերում ալիքի անցման գործակիցը հավասար է մեկի:

D. M. SEDRAKIAN, A. Zh. KHACHATRIAN, N. M. ISPIRYAN, Yu. N. HAYRAPETYAN

TRANSMISSION AND REFLECTION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE OBLIQUELY INCIDENT ONTO AN IDEAL STRUCTURE

Summary

In the given article we investigate the behavior of transmission and reflection bands of flat electromagnetic wave falling inclined on ideal layered structure, subject to parameters of structure and wave angle of incidence. The condition at which the contact of transmission bands becomes possible is found. The given condition has the same view both in case of *s*- and *p*-waves. It has been shown, that independently of the kind of wave polarization in revealed points of band contacts the transmission coefficient of wave is equal to one.