ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2004 Естественные науки

*Математика*

УДК 517.53

И. Г. ХАЧАТРЯН

# ОБ ОБРАТИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ФУРЬЕ

Рассматривается в пространстве $L^2(0,\infty)$ интегральный оператор $U$ типа Фурье, который возникает в обратной задаче квантовой теории рассеяния. Доказывается, что либо $U$, либо сопряженный оператор $U^*$ имеет обратный.

Пусть $S(\lambda)$ – ограниченная и измеримая комплекснозначная функция, определенная на полуоси $\lambda > 0$. Обозначим

$$u(x,\lambda) = e^{-ix\lambda} + S(\lambda)e^{ix\lambda}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0.$$

При помощи функции $u(x,\lambda)$ определим в пространстве $L^2(0,\infty)$ ограниченный оператор $U$ по формуле

$$(Uf)(\lambda) = \int_0^\infty \overline{u(x,\lambda)} f(x)dx, \quad \lambda > 0, \quad f \in L^2(0,\infty),$$

где интеграл сходится по норме $L^2(0,\infty)$. Сопряженный оператор $U^*$ задается по формуле

$$(U^*\varphi)(x) = \int_0^\infty u(x,\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda, \quad x > 0, \quad \varphi \in L^2(0,\infty),$$

где интеграл сходится опять по норме $L^2(0,\infty)$. Для $x > 0$ и $\lambda > 0$ рассмотрим также функции

$$v(x,\lambda) = e^{-ix\lambda} - \overline{S(\lambda)}e^{ix\lambda}, \quad w(x,\lambda) = e^{-ix\lambda} + \overline{S(\lambda)}e^{ix\lambda}$$

и при их помощи по аналогии с $U$ определим в $L^2(0,\infty)$ операторы $V$ и $W$. Операторы $U$, $V$ и вопрос их обратимости возникают в обратной задаче квантовой теории рассеяния (см. [1–3]).

*Лемма 1.* Если для функций $f$ и $g$ из $L^2(0,\infty)$ почти при всех $\lambda > 0$ выполняется равенство

$$\int_0^\infty e^{ix\lambda} f(x)dx \int_0^\infty e^{ix\lambda} g(x)dx + a\int_0^\infty e^{-ix\lambda} f(x)dx \int_0^\infty e^{-ix\lambda} g(x)dx = 0, \tag{1}$$

где $a^2 = 1$, то либо $f = 0$, либо $g = 0$.

*Доказательство.* С учетом $a^2 = 1$, очевидно, равенство (1) выполняется почти при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Продолжим функции $f$ и $g$ на отрицательную полуось, положив $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ при $x < 0$. Для $\lambda \in (-\infty, \infty)$ равенство (1) напишем в виде

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ix\lambda} f(-x)dx \int_{-\infty}^\infty e^{ix\lambda} g(x)dx + a\int_{-\infty}^\infty e^{-ix\lambda} f(x)dx \int_{-\infty}^\infty e^{ix\lambda} g(-x)dx = 0.$$

Отсюда следует, что для каждого $t > 0$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ix\lambda} f(t-x)dx \int_{-\infty}^\infty e^{ix\lambda} g(x)dx + a\int_{-\infty}^\infty e^{-ix\lambda} f(x-t)dx \int_{-\infty}^\infty e^{ix\lambda} g(-x)dx = 0.$$

Интегрируя обе части этого равенства по $\lambda \in (-\infty, \infty)$, в силу равенства Парсеваля (см. [4]) получим

$$\int_0^t f(t-x)g(x)dx = 0, \quad t > 0.$$

Обе части последнего равенства умножим на $e^{it\lambda}$ и проинтегрируем по $t \in (0, \infty)$. Тогда после простых преобразований получим

$$\int_0^\infty e^{ix\lambda} f(x)dx \int_0^\infty e^{ix\lambda} g(x)dx = 0, \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Очевидно, в этом равенстве один из множителей равен нулю для всех значений $\lambda$ из множества положительной меры. Отсюда вытекает (см. [5], с. 413; [6], с. 183–189), что либо $f = 0$, либо $g = 0$.

*Лемма 2.* Если функция $\varphi \in L^2(0, \infty)$ такая, что $U^*\varphi = 0$, а функция $g \in L^2(0, \infty)$ определена равенством

$$g(x) = \int_0^\infty e^{ix\lambda}\varphi(\lambda)d\lambda + \int_0^\infty e^{-ix\lambda} S(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda, \quad x > 0, \tag{2}$$

то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-ix\lambda} g(x)dx = \varphi(\lambda), \quad \lambda > 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{ix\lambda} g(x)dx = S(\lambda)\varphi(\lambda), \quad \lambda > 0, \tag{4}$$

и, значит, $Vg = 0$. Обратно, если функция $g \in L^2(0, \infty)$ такая, что $Vg = 0$, а функция $\varphi \in L^2(0, \infty)$ определена равенством (3), то выполняются также равенства (4), (2) и $U^*\varphi = 0$. Следовательно, операторы $U^*$ и $V$ могут быть обратимыми лишь одновременно.

*Доказательство.* Равенство $U^*\varphi=0$ напишем в виде

$$0=\int_0^\infty e^{ix\lambda}\varphi(\lambda)d\lambda+\int_0^\infty e^{-ix\lambda}S(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda,\ \ x<0. \qquad (5)$$

Продолжим функции $\varphi(\lambda)$ и $S(\lambda)$ на отрицательную полуось, положив $\varphi(\lambda)=0$ и $S(\lambda)=0$ при $\lambda<0$. Тогда из (2) и (5) при помощи преобразования Фурье получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{ix\lambda}g(x)dx=\varphi(-\lambda)+S(\lambda)\varphi(\lambda),\qquad -\infty<\lambda<\infty. \qquad (6)$$

Это равенство эквивалентно равенствам (3) и (4), из которых вытекает также

$$\int_0^\infty e^{ix\lambda}g(x)dx-S(\lambda)\int_0^\infty e^{-ix\lambda}g(x)dx=0,\ \ \lambda>0, \qquad (7)$$

или, что то же самое, $Vg=0$.

Обратное утверждение доказывается следующим образом. Из условия $Vg=0$, эквивалентного равенству (7), с учетом (3) вытекает (4), а значит, и (6). Из (6) при помощи преобразования Фурье получаем (2) и (5), а (5) эквивалентно равенству $U^*\varphi=0$.

*Теорема.* В каждой паре $(U,\ V)$, $(U,\ W)$, $(U,\ U^*)$, $(U^*U,\ UU^*)$ один из операторов имеет обратный. Следовательно, если одна из функций $S(\lambda)$ и $iS(\lambda)$ вещественнозначна, то все указанные операторы имеют обратные.

*Доказательство.* Пусть функции $f$ и $g$ из $L^2(0,\infty)$ такие, что $Uf=0$ и $Vg=0$, т. е. выполняются равенства (6) и

$$\int_0^\infty e^{ix\lambda}f(x)dx+\overline{S(\lambda)}\int_0^\infty e^{-ix\lambda}f(x)dx=0,\ \ \lambda>0. \qquad (8)$$

Из (7) и (8) получаем

$$\int_0^\infty e^{ix\lambda}\overline{f(x)}dx\int_0^\infty e^{ix\lambda}g(x)dx+\int_0^\infty e^{-ix\lambda}\overline{f(x)}dx\int_0^\infty e^{-ix\lambda}g(x)dx=0,\ \ \lambda>0.$$

Но тогда в силу леммы 1 либо $f=0$, либо $g=0$, т. е. один из операторов $U$ и $V$ имеет обратный.

Если же $Uf=0$ и $Wg=0$, то

$$\int_0^\infty e^{ix\lambda}\overline{f(x)}dx\int_0^\infty e^{ix\lambda}g(x)dx-\int_0^\infty e^{-ix\lambda}\overline{f(x)}dx\int_0^\infty e^{-ix\lambda}g(x)dx=0,\ \ \lambda>0.$$

Отсюда в силу леммы 1 получаем обратимость одного из операторов $U$ и $V$.

В силу леммы 2 и обратимости одного из операторов $U$ и $V$ один из операторов $U$ и $U^*$ имеет обратный.

Рассмотрим теперь такие функции $f$ и $\varphi$ из $L^2(0,\infty)$, для которых $U^*Uf=0$ и $UU^*\varphi=0$. Тогда имеем $\langle Uf, Uf\rangle = \langle U^*Uf, f\rangle = 0$ и $\langle U^*\varphi, U^*\varphi\rangle = \langle UU^*\varphi, \varphi\rangle = 0$. Поэтому $Uf=0$ и $U^*\varphi=0$. Отсюда, как уже доказано, следует, что либо $f=0$, либо $\varphi=0$, т. е. один из операторов $U^*U$ и $UU^*$ имеет обратный.

*Кафедра дифференциальных уравнений*

*Поступила 11.06.2003*

ЛИТЕРАТУРА


1. **Марченко В.А.** Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
2. **Хачатрян И.Г.** – Докл. АН Арм. ССР, 1983, т. 77, № 2, с. 55–58.
3. **Хачатрян И.Г.** – Изв. АН Арм. ССР, Математика, 1985, т. 20, № 1, с. 41–52.
4. **Джрбашян М.М.** Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
5. **Голузин Г.М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
6. **Гофман К.** Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1975.


Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՖՈՒՐՅԵԻ ՏԻՊԻ ՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՀԱԿԱԴԱՐՁԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է $L^2(0,\infty)$ տարածությունում Ֆուրյեի տիպի ինտեգրալ $U$ օպերատոր, որն առաջանում է ցրման քվանտային տեսության հակադարձ խնդրում: Ապացուցվում է, որ կամ $U$ օպերատորը, կամ նրա $U^*$ համալուծն ունի հակադարձ:

I. G. KHACHATRYAN

ON THE INVERSIBILITY OF SOME FOURIER TYPE INTEGRAL OPERATORS

Summary

The paper considers in the space $L^2(0,\infty)$ a Fourier type integral operator $U$, which arise in the inverse problem of the quantum scattering theory. It is proved, that either operator $U$ or its conjugate $U^*$ is invertible.