ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2004 Естественные науки

Математика

УДК 512.57

И. Р. СИМОНЯН

РЕШЕТКИ ДИСТРИБУТИВНЫХ И СВЕРХДИСТРИБУТИВНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

В данной работе найдены все многообразия дистрибутивных и сверхдистрибутивных полугрупп, а также описываются решетки их подмногообразий.

Введем некоторые обозначения. Пусть дано слово $s = x_1^{k_1}...x_l^{k_l}$. Тогда

$$h(s)=\begin{cases} x_1, & если\ \ k_1 = 1 \\ X_1, & если\ \ k_1 > 1 \end{cases}; \qquad t(s)=\begin{cases} x_l, & если\ \ k_l = 1 \\ X_l, & если\ \ k_l > 1 \end{cases};$$

$n_i(s) = k_i$, $i = \overline{1,l}$; $n(s) = \sum_1^l n_i(s)$, а $c(s) = \{x_1^{k_1},...,x_m^{k_{m1}}\}$ – множество всех различных переменных, входящих в s.

$l(s)$ выписывает различные переменные s в том порядке, в котором они встречаются в s слева направо, т.е. $l(s) = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_m}$.

Через $ModV$ обозначим многообразие полугрупп V, в котором выполняется тождество левой дистрибутивности $xyz = xyxz$.

§ 1. Идемпотентные дистрибутивные многообразия полугрупп.

Предложение 1. Многообразия полугрупп $I_0 = Mod\{x = y\}, I_1 = Mod\{x = xy\}, I_2 = Mod\{x = x^2, xy = yx\}, I_3 = Mod\{x = yx\}, I_4 = Mod\{x = x^2, xyz = xzy\}, I_5 = Mod\{x = x^2, x = xyx\}, I_6 = Mod\{x = x^2, xyz = yxz\}, I_8 = Mod\{x = x^2, xyzx = xzyx\}$ являются единственными подмногообразиями многообразия

$$I' = \{x = x^2, xyz = xyxz,\ xyz = xzyz\} = I_8.$$

Доказательство. В [1] доказано, что единственными подмногообразиями $I = \{x = x^2, xyz = xyxz\}$ являются многообразия $I_0 - I_6, I_7 = Mod\{x = x^2, xyx = xy\}$, $Mod\{x = x^2, xyx = xy\}$, $I_8, I_9 = I$. Покажем, что в $I_0 - I_6, I_8$ выполняется тождество правой дистрибутивности $xyz = xzxy$ (*).

Для I_0, I_2, I_4, I_6 это очевидно.

В I_1 выполняются любые тождества $u = v$, для которых $h(u) = h(v)$. Имеем $h(xyz) = x$, $h(xzyz) = x$, значит, из I_1 выводимо $xyz = xzxy$. Для I_3 доказательство аналогично – с той лишь разницей, что здесь используется $t(s)$.

В I_7 тождество (*) не выполняется, так как если в I_7 выводимо $u = v$, то $l(u) = l(v)$, а $l(xyz) = xyz \neq l(xzyz) = xzy$. Если в I_7 добавить тождество (*), то получим, что из $xy = xyx$ следует $xzyz = xzy = xyz$, т.е. $I_7 \bigcap \{xyz = xzyz\} \subseteq I_4$. Обратное, из $xyz = xzy, x = x^2$ легко получается $\underline{xyx} = x * xy = x^2 y = xy$, а значит, $I_4 \subseteq I_7$, откуда следует, что $I_7 \bigcap \{xyz = xzyz\} = I_4$.

Рассмотрим $I_9 \bigcap \{xyz = xzyz\}$. Очевидно, что из $xyz = xyxz, xyz = xzyz$ следует $\underline{xyz}x = \underline{x(yx)}zx = xz\underline{yxzx} = x\underline{zyzx} = xzyx$. Тогда $I_9 \bigcap \{xyz = xzyz\} \subseteq I_8$. Обратное, из $x = x^2, xyzx = xzyx$ и $xyz = xyxz$ получим, что $xyz = xyz^2 =$ $= x(yz)z = x(yz)xz = x(zy)xz = xzyz$. Таким образом, $I_8 \subseteq I_9 \bigcap \{xyz = xzyz\}$, откуда следует, что $I_8 = I_9 \bigcap \{xyz = xzyz\}$.

Следствие 1 ([1], предложение 4.1). $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_4, I_1 \subseteq I_5 \subseteq I_8$, $I_2 \subseteq I_6 \subseteq I_8$, $I_0 \subseteq I_2 \subseteq I_4 \subseteq I_8$, $I_0 \subseteq I_3 \subseteq I_5$, $I_3 \subseteq I_6$.

§ 2. A_i-полугруппы. Рассмотрим многообразия A_i-полугрупп:

$$A_0 = Mod\{x = y\},\ A_1 = Mod\{xy = zx\}, A_2 = Mod\{xyz = u^2, xy = yx\},$$

$$A_3 = Mod\{xyz = u^3, xy = yx\},\ A_4 = Mod\{xyz = u^2\}, A_5 = Mod\{xyz = u^3\}.$$

Предложение 2. Все многообразия A_i-полугрупп праводистрибутивны, т.е. в них выполняется (*).

Доказательство. A_1: $x\underline{yz} = xz\underline{(yz)}$ (используем $xy = zx$, где положим $x = z, y = yz, z = y$). Для остальных A_i-полугрупп доказательство очевидно.

§ 3. $P_{i,j}$-полугруппы. В [1] $P_{i,j}$ были определены следующим образом: $P_{i,j} = A_i + I_j$.

Предложение 3. В $P_{i,j}, j \neq 7,9$, выполняется тождество правой дистрибутивности $xyz = xzyz$.

Доказательство. По определению, $P_{i,j}$ – наименьшее многообразие полугрупп, которое содержит A_i и I_j, а так как в A_i и в $I_j, j \neq 7,9$, выполняется (*), то и в $P_{i,j}, j \neq 7,9$, оно также выполняется.

Рассмотрим остальные многообразия полугрупп, определенные в [1]. В многообразиях полугрупп $S_1 = Mod\{x^2 = x^3, xy^2 = xyx\}$, $S_2 = Mod\{x^2 = x^3\}$,

$S_3 = Mod\{xy^2 = xyx\}, R_1 = Mod\{xy = xyx\}, R_2 = Mod\{xy = xy^2\}$, $R_3 = R\bigcap S_1 =$
$= Mod\{x^2 = x^3, xy^2 = xyx, x^2y = x^2y^2\}, R_4 = R\bigcap S_2 = Mod\{x^2 = x^3, x^2y = x^2y^2\}$,
$R_5 = R\bigcap S_3 = Mod\{x^2y = x^2y, xy^2 = xyx\}, R_6 = R = Mod\{x^2y = x^2y^2\}, T_1 =$
$= Mod\{xy = x^2y\}, T_2 = T\bigcap S_2 = Mod\{x^2 = x^3, xy^2 = x^2y^2\}, T_3 = T = Mod\{xy^2 = x^2y\}$
не выполняется $xyz = xzyz$, так как для любого тождества $u = v$ каждого из этих многообразий полугрупп необходимо $l(u) = l(v)$, а $l(xyz) = xyz, l(xzyz) = xzy$, т.е. $l(xyz) \neq l(xzyz)$.

Предложение 4. Если хотя бы в одно из вышеперечисленных многообразий полугрупп добавить тождество (*), то оно будет подмногообразием $T\bigcap R$, а значит, равно $P_{i,j}$ для подходящих i, j.

Доказательство. Обозначим через $S_3^{'} = S_3\bigcap\{xyz = xzyz\} =$ $= Mod\{xy^2 = xyx, xyz = xzyz\}$, тогда $x^2y^2 = x\underline{xyy} = x * xyx = xyx = xy^2$, следовательно, $S_3^{'} \subseteq T$. Далее, $x^2y = \underline{xxy} = \underline{xyxy} = xy^2 = x^2y^2$, откуда $S_3^{'} \subseteq R$, а это означает, что $S_3^{'} \subseteq T\bigcap R$, следовательно, $S_3^{'} = P_{i,j}$ для подходящих i, j.

$S_2^{'} = S_2\bigcap\{xyz = xzyz\} = Mod\{x^2 = x^3, xyz = xzyz\}$. Здесь $x^2y = \underline{xxy} =$ $= xyxy = (xy)^2 = (xy)^3 = \underline{xyxyxy} = xy^2xy = xyxy = xy^2$, следовательно, $S_2^{'} \subseteq T$. Далее, $x^2y = x^3y = x * x^2y = x * xy^2 = x^2y^2$, откуда следует, что $S_2^{'} \subseteq R$. Таким образом, $S_2^{'} \subseteq T\bigcap R$.

Очевидно, что

$S_1^{'} = S_1\bigcap\{xyz = xzyz\} = Mod\{x^2 = x^3, xy^2 = xyx, xyz = xzyz\} \subseteq T\bigcap R$.

Из вышеизложенного ясно, что если в T добавить $xyz = xzyz$, то $T' = T\bigcap\{xyz = xzyz\} \subseteq R$, откуда следует, что $T' \subseteq T\bigcap R$. Аналогично и для R.

Таким образом, все перечисленные в [1] многообразия полугрупп, построенные посредством подмногообразий S, T и R, совпадут с каким-либо из $P_{i,j}$.

В [1] показано, что $P_{0,j} = I_j, j = \overline{0,9}, P_{i,0} = A_i, i = \overline{0,5}, P_{2,j} = P_{4,j}, P_{3,j} = P_{5,j}$, $j \neq 0,2$. Таким образом, учитывая, что по [1] любое подмногообразие $T\bigcap R$, где $T = Mod\{xy^2 = x^2y\}$, $R = Mod\{x^2y = x^2y^2\}$ эквивалентно $P_{i,j}$ при соответствующих i и j, получим

Следствие 2. Каждое леводистрибутивное подмногобразие полугрупп, в котором выполняется (*), эквивалентно одному из следующих многообразий:

$D_0 = P_{0,0} = A_0 = I_0, D_1 = P_{0,1} = I_1, ..., D_6 = P_{0,6} = I_6, D_7 = P_{0,8} = I_8, D_8 = P_{1,0} = A_1, ...,$

$D_{12} = P_{5,0} = A_5, D_{13} = P_{1,1}, ..., D_{18} = P_{1,6}, D_{19} = P_{1,8}, D_{20} = P_{2,2}, D_{21} = P_{2,1} = P_{4,1}$, $D_{22} = P_{4,2}, D_{23} = P_{2,3}, D_{24} = P_{2,4} = P_{4,4}, D_{25} = P_{2,5} = P_{4,5}, D_{26} = P_{2,6} = P_{4,6}$, $D_{27} = P_{2,8} = P_{4,8}$, $D_{29} = P_{3,1} = P_{5,1}, D_{30} = P_{3,2} = P_{5,2}, D_{31} = P_{3,3} = P_{5,3}, D_{32} = P_{3,4} = P_{5,4}$, $D_{33} = P_{3,5} = P_{5,5}, D_{34} = P_{3,6} = P_{5,6}, D_{35} = P_{3,8} = P_{5,8}$. Таким образом, единственными дистрибутивными многообразиями полугрупп являются многообразия $D_0 - D_{35}$.

§ 4. Вид многообразий D_0–D_{35}.

Лемма 1. Если в многообразии полугрупп V выполняется тождества правой и левой дистрибутивности, то

(i) в V выполняются тождества

$$xyx = x^2yx, xyx = xy^2x, xyx = xyx^2, x^2y = xy^2;$$

(ii) в V выполняется импликация

$$xyx = xy \Rightarrow x^2y = xyx, xy^2 = xyx, x^2y = xy;$$

(iii) в V выполняется импликация

$$xyx = yx \Rightarrow x^2y = yx, xyx = yx^2, xyx = y^2x.$$

Доказательство.

(i) $\underline{xyx} = xxyx = x^2yx, \underline{xyx} = xyxx = xyx^2, xyx = \underline{xxyx} = x\underline{yxyx} = xy^2x$, $x^2y = xxy = \underline{xyxy} = xy^2$;

(ii) $x^2y = xxy = \underline{xyxy} \underset{(xyx=xy)}{=} xyx = xy, xyx = xy^2$ (следует из предыдущего);

(iii) $xyx = yx^2, xyx = y^2x$ (аналогично (i)), $x^2y = xxy = x\underline{yxy} = xyx = yx$.

Теперь найдем общий вид многообразий $D_{13} - D_{35}$. Через $x_1x_2...x_n = y_1y_2...y_m \ (1)^k$, $n, m \in N, k = \overline{13,35}$, обозначим те тождества, посредством которых определяется $D_k, k = \overline{13,35}$. Найдем конкретный вид этих тождеств. Начнем с $D_{13} = P_{1,1}$.

Так как $P_{1,1} = A_1 + I_1$, следовательно, $A_1 \subseteq P_{1,1}, I_1 \subseteq P_{1,1}$, то $(1)^{13}$ должно следовать из тождеств, которыми определяются A_1 и I_1.

$I_1 = Mod\{x = xy\}$, следовательно, в $(1)^{13}$ $x_1 = y_1$;

$A_1 = Mod\{xy = zx\}$, следовательно, в $(1)^{13}$ $x_1 = y_m$, $n, m \geq 2$.

Таким образом, получим $xx_2...x_n = xy_2...y_{m-1}x \ (1)^{13}$, $n, m \geq 2$, следовательно, $P_{1,1} \subseteq Mod\{xx_2...x_n = xy_2...y_{m-1}x, n, m \geq 2\} = D_{13}^{n,m}$. Найдем наименьшее из этих многообразий. Легко видеть, что $xy = xzx$ следует из $xx_2...x_n = xy_2...y_{m-1}x, n \geq 2, m \geq 3$, достаточно положить $y = x_2...x_n$, $z = y_2...y_{m-1}$. При $m = 2$ получим $xy = x^2$. Из $xy = x^2$ следует $xy = xzx$ (из $x\underline{zx} = x^2$ следует $xy = x\underline{zx}$). Таким образом, $Mod\{xy = x^2\} \subseteq D_{13}^{n,m}$,

$\forall n, m \geq 2$, откуда следует, что $Mod\{xy = x^2\} \bigcap_{n,m\geq 2} D_{13}^{n,m} = D_{13}$. С другой стороны, $D_{13} \subseteq Mod\{xy = x^2\}$. Отсюда следует, что $D_{13} = Mod\{xy = x^2\}$.

Рассуждая подобным образом, найдем вид остальных многообразий.

Итак, $D_{14} = P_{1,2} = A_1 + I_2$.

$I_2 = Mod\{x = x^2, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{14}$ $c(x_1x_2...x_n) = c(y_1y_2...y_m)$;

$A_1 = Mod\{xy = zx\}$, следовательно, в $(1)^{14}$ $x_1 = y_m, n, m \geq 2$.

Таким образом, $xx_2...x_n = x_{i_1}...x_{i_{m-1}}x$ $(1)^{14}$, $n, m \geq 2$. Пусть $x_1', x_2', ..., x_k'$ – все отличные друг от друга переменные из $c(x_1x_2...x_n)$. Если $n_i(xx_2...x_n) = = n_j(x_{i_1}...x_{i_{m-1}}x), j = \overline{1,k}$, то $(1)^{14}$ легко получить из $xy = yx$. В обратном случае наше тождество легко получается из $xy = yx, xy = y^2x, xy = yx^2$. Отсюда следует, что

$$Mod\{xy = yx, xy = y^2x, xy = yx^2\} \subseteq D_{14}^{n,m} = Mod\{xx_2...x_n = x_{i_1}...x_{i_{m-1}}x, n, m \geq 2\},$$

т.е. $Mod\{xy = yx, xy = y^2x, xy = yx^2\} \subseteq \bigcap_{n,m\geq 2} D_{14}^{n,m} = D_{14}$. С другой стороны, $D_{14} \subseteq Mod\{xy = yx, xy = y^2x, xy = yx^2\}$, откуда следует, что $D_{14} = Mod\{xy = yx, xy = y^2x, xy = yx^2\}$.

$D_{15} = P_{1,3} = A_1 + I_3$.

$I_3 = Mod\{x = yx\}$, следовательно, в $(1)^{15}$ $x_n = y_m$;

$A_1 = Mod\{xy = zx\}$, следовательно, в $(1)^{15}$ $x_1 = x_m, n, m \geq 2$.

Таким образом, $xx_2...x_{n-1}x = y_1...y_{m-1}x$ $(1)^{15}$. Ясно, что из $xyz = zx$ следует $(1)^{15}$ при $n \geq 3$, $m \geq 2$ (достаточно взять $x_2...x_{n-1} = y$, $y_1...y_{m-1} = z$). При $n = 2$ имеем $x^2 = yx$. Из $x^2 = yx$ следует $xyx = zx$ $(x^2 = zx, (xy)x = x^2)$. Таким образом, $Mod\{x^2 = yx\} \subseteq D_{15}^{n,m}, n, m \geq 2$, откуда следует, что $Mod\{x^2 = yx\} \subseteq \bigcap_{n,m\geq 2} D_{15}^{n,m} = D_{15}$. $D_{15} \subseteq Mod\{x^2 = yx\}$, следовательно, $D_{15} = Mod\{x^2 = yx\}$.

$D_{16} = P_{1,4} = A_1 + I_4$.

$I_4 = Mod\{x = x^2, xyz = xzy\}$, тогда в $(1)^{16}$ $c(x_1x_2...x_n) = c(y_1y_2...y_m), x_1 = y_1$;

$A_1 = Mod\{xy = zx\}$, следовательно, в $(1)^{16}$ $x_1 = y_m, n, m \geq 2$.

Отсюда получим $xx_2...x_n = xx_{i_2}...x_{i_{m-1}}x$ $(1)^{16}$, $n, m \geq 2$. Если $n \geq 3$, $m \geq 4$, то из тождеств $xyz = xyzx, xyz = xzyx$ следуют все тождества вида $(1)^{16}$, где $n \geq 3$, $m \geq 4$. Рассмотрим остальные случаи.

1. $n = 2$, $m = 2$, получим тривиальное тождество $x^2 = x^3$.

2. $n=3,\ m=3$, получим $x^2y=xyx, xy^2=xyx$.

3. $n=2,\ m=3$, получим $xy=xyx$.

По *лемме 1*, $x^2y=xyx, xy^2=xyx$ следуют из $xy=xyx$. Очевидно, что из $xyz=xyzx$ следует $xy=xyx$. Таким образом, $Mod\{xy=xyx, xyz=xzyx\}\subseteq \bigcap\limits_{n,m\geq 2} D_{16}^{n,m}=D_{16}$.

Обратное, $D_{16}\subseteq Mod\{xy=xyx, xyz=xzyx\}$, таким образом, $D_{16}=Mod\{xy=xyx, xyz=xzyx\}$.

$D_{17}=P_{1,5}=A_1+I_5$.

$I_5=Mod\{x=x^2, x=xyx\}$, тогда в $(1)^{17}$ $x_n=x_m=y_1=y_m$, $n\geq 1$, $m\geq 3$;

$A_1=Mod\{xy=zx\}$, следовательно, в $(1)^{17}$ $x_n=y_m$, $n,m\geq 2$.

Таким образом, $xx_2...x_{n-1}x=xy_2...y_{m-1}x$ $(1)^{17}$, $n\geq 2$, $m\geq 3$. Заметим также, что и в I_5, и в A_1 выполняются тождества $xy=x^2y, xy=xy^2$. Выполнимость этих тождеств в I_5 следует из $x=x^2$. Покажем выполнимость $xy=x^2y$ из $xy=zx$ (в частности из $xy=yx$): $xy=yx=x^2y$ $(y=x, x=y, z=x^2)$. Отсюда и из *леммы 1* следует выполнимость $xy=xy^2$. Теперь перейдем к $(1)^{17}$. Из $xyx=xzx$ следует $(1)^{17}$, где $n,m\geq 3$. При $n=2$, $m=3$ имеем $x^2=xyx$. Легко заметить, что из $x^2=xyx$ вытекает $xyx=xzx$. Таким образом, $Mod\{x^2=xyx, xy=x^2y\}\subseteq \bigcap\limits_{n,m\geq 2} D_{17}^{n,m}=D_{17}$.

$D_{17}\subseteq Mod\{x^2=xyx, xy=x^2y\}$, откуда следует, что $D_{17}=Mod\{x^2=xyx, xy=x^2y\}$.

$D_{18}=P_{1,6}=A_1+I_6$.

$I_6=Mod\{x=x^2, xyz=yxz\}$, тогда в $(1)^{18}$ $c(x_1x_2...x_n)=c(y_1y_2...y_m), x_n=y_m$;

$A_1=Mod\{xy=zx\}$, следовательно, в $(1)^{18}$ $x_1=y_m, n,m\geq 2$.

Таким образом, $xx_2...x_{n-1}x=x_{i_1}...x_{i_{m-1}}x$ $(1)^{18}$, $n,m\geq 2$. Заметим, что из тождеств $xyzx=yzx, xyzx=zyx$ следуют все тождества вида $(1)^{18}$, где $n\geq 4$, $m\geq 3$. Рассмотрим оставшиеся случаи.

При $n=3$, $m=3$ получим тождества $xyx=y^2x, xyx=yx^2$; при $n=3$, $m=2$ – тождество $xyx=yx$; при $n=2$, $m=3$ – $x^2=x^3$; при $n=2$, $m=2$ – тривиальное тождество $x^2=x^2$.

Следуя *лемме 1*, получим, что из $xyx=yx$ вытекают $xyx=y^2x, xyx= =yx^2$. Очевидно, что из $xyx=yx$ следуют $xyzx=yzx$ $(\underline{xyzx}=\underline{x(zy)zx}=$

$= \underline{xzyxzx} = z\underline{yxzx} \underset{(xyx=yx)}{=} zyzx = zyx), x^3 = x^2$.

Таким образом, $Mod\{xyx = xy\} \subseteq \bigcap\limits_{n,m\ge 2} D_{18}^{n,m} = D_{18}$. $D_{18} \subseteq Mod\{xyx = xy\}$, следовательно, $D_{18} = Mod\{xyx = xy\}$.

$D_{19} = P_{1,8} = A_1 + I_8$.

$I_8 = Mod\{x = x^2, xyzx = xzyx\}$, тогда в $(1)^{19}$ $c(x_1x_2...x_n) = c(y_1y_2...y_m)$, $x_1 = x_n = y_1 = y_m$.

$A_1 = Mod\{xy = zx\}$, следовательно, в $(1)^{19}$ $x_1 = y_m, n, m \ge 2$.

Получим $xx_2...x_{n-1}x = xx_{i_2}...x_{i_{m-1}}x$ $(1)^{19}$, $n, m \ge 2$. Если $n, m \ge 4$, то $(1)^{19}$ следует из $xyzx = xzyx$. Теперь рассмотрим остальные случаи.

При $n = 3, m = 4$ получим тождества $xyx = x^2yx, xyx = xy^2x, xyx = xyx^2$ (по *лемме 1* они выполняются в этом многообразии); при $n = 3, m = 3$ – тривиальное тождество $xyx = xyx$; при $n = 2,\ m = 3$ – $x^2 = x^3$ (при $n = 3,\ m = 2$ – аналогично).

Здесь также выполняется тождество $xy = x^2y$, которое невыводимо из $xyzx = xzyx$. Отсюда следует, что $Mod\{xyzx = xzyx, xy = x^2y\} \subseteq \bigcap\limits_{n,m\ge 2} D_{19}^{n,m} = D_{19}$. С другой стороны, $D_{19} \subseteq Mod\{xyzx = xzyx, xy = x^2y\}$, откуда получим, что $D_{19} = Mod\{xyzx = xzyx, xy = x^2y\}$.

$D_{20} = P_{2,2} = A_2 + I_2$.

$I_2 = Mod\{x = x^2, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{20}$ $c(x_1x_2...x_n) = c(y_1y_2...y_m)$;

$A_2 = Mod\{xyz = u^2, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{20}$ $n \ge 3,\ m \ge 2$.

Ясно, что $xy = yx$ выполняется в D_{20}. Так как $c(x_1x_2...x_n) = c(y_1y_2...y_m)$, то из $xy = yx, x^2y = yx$ выводятся все тождества вида $x_1x_2...x_n = x_{i_1}...x_{i_{m-1}}x_m$ $(1)^{20}$, $n \ge 3,\ m \ge 2$. Таким образом, $Mod\{xy = yx, x^2y = yx\} \subseteq \bigcap\limits_{n\ge 3, m\ge 2} D_{20}^{n,m} = D_{20}$. Обратное, $D_{20} \subseteq Mod\{xy = yx, x^2y = yx\}$, откуда $D_{20} = Mod\{xy = yx, x^2y = yx\}$.

$D_{21} = P_{2,1} = A_2 + I_1$.

$I_1 = Mod\{x = xy\}$, следовательно, в $(1)^{21}$ $x_1 = y_1$;

$A_2 = Mod\{xyz = u^2, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{21}$ $n \ge 3,\ m \ge 2$.

Получим $xx_2...x_n = xy_2...y_m$ $(1)^{21}$, $n \ge 3,\ m \ge 2$. Легко заметить, что из $xyz = xuv$ следует любое тождество вида $(1)^{21}$, где $n, m \ge 3$. При $n = 3$, $m = 2$ получим тождество $xyz = xu$, из которого очевидно следует

$xyz = xuv$. В итоге получим, что $Mod\{xyz = xu\} \subseteq \bigcap_{n\ge3, m\ge2} D_{21}^{n,m} = D_{21}$. Обратное, $D_{21} \subseteq Mod\{xyz = xu\}$, а это означает, что $D_{21} = Mod\{xyz = xu\}$.

$D_{22} = P_{4,1} = A_4 + I_1$.

$I_2 = Mod\{x = x^2, xy = yx\}$, следовательно в $(1)^{22}$ $c(x_1x_2...x_n) = c(y_1y_2...y_m)$;

$A_4 = Mod\{xyz = u^2\}$, следовательно, в $(1)^{22}$ $n \ge 3$, $m \ge 2$.

Получим $x_1x_2...x_n = x_{i_1}...x_{i_{m-1}}x_m$ $(1)^{22}$, $n \ge 3$, $m \ge 2$. Ясно, что из тождеств $xyz = xzy$, $xyz = yxz$ следуют все тождества $(1)^{22}$, где $n, m \ge 3$. При $n = 3$, $m = 2$ получим тождества $xyx = xy, xyx = yx$,. По *лемме 1*, тождества $x^2x = yx$, $xy^2 = yx$ выводимы из тождеств $xyx = xy, xyx = yx$. Далее, из $xyx = xy$, $xyx = yx, x^2x = yx, xy^2 = yx$ получаем $xyz = x\underline{zyz} = xzy$, $xyz = x\underline{zyz} = xzy$. Тогда $Mod\{xyx = xy, xyx = yx\} \subseteq \bigcap_{n\ge3, m\ge2} D_{22}^{n,m} = D_{22}$.

Обратное, $D_{22} \subseteq Mod\{xyx = xy, xyx = yx\}$, откуда следует, что $D_{22} = Mod\{xyx = xy, xyx = yx\}$.

$D_{23} = P_{2,3} = A_2 + I_3$.

$I_3 = Mod\{x = yx\}$, следовательно, в $(1)^{23}$ $x_n = y_m$;

$A_2 = Mod\{xyz = u^2, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{23}$ $n \ge 3$, $m \ge 2$.

Получим $x_1...x_{n-1}x = y_1...y_{m-1}x$ $(1)^{23}$, $n \ge 3$, $m \ge 2$. Легко видеть, что из тождества $xyz = uz$ следуют все тождества вида $(1)^{23}$, а это означает, что $Mod\{xyz = uz\} \subseteq \bigcap_{n\ge3, m\ge2} D_{23}^{n,m} = D_{23}$. С другой стороны, $D_{23} \subseteq Mod\{xyz = uz\}$, откуда следует, что $D_{23} = Mod\{xyz = uz\}$.

$D_{24} = P_{2,4} = A_2 + I_4$.

$I_4 = Mod\{x = x^2, xyz = xzy\}$, тогда в $(1)^{24}$ $c(x_1x_2...x_n) = c(y_1y_2...y_m), x_1 = y_1$;

$A_2 = Mod\{xyz = u^2, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{24}$ $n \ge 3$, $m \ge 2$.

Получим $x_1x_2...x_n = xx_{i_2}...x_m$ $(1)^{24}$, $n \ge 3$, $m \ge 2$. При $n, m \ge 3$ получим тождество $xyz = xzy$, из которого следуют $(1)^{24}$, для которых $n, m \ge 3$. При $n = 3$, $m = 2$ получим тождество $x^2 = x^3$. Таким образом, $Mod\{x^2 = x^3, xyz = xzy\} \subseteq \bigcap_{n\ge3, m\ge2} D_{24}^{n,m} = D_{24}$, откуда следует, что $D_{24} \subseteq Mod\{x^2 = x^3, xyz = xzy\}$, а это значит, что $D_{24} = Mod\{x^2 = x^3, xyz = xzy\}$.

$D_{25} = P_{2,5} = A_2 + I_5$.

$I_5 = Mod\{x = x^2, x = xyx\}$, тогда в $(1)^{25}$ $x_1 = x_n = y_1 = y_m$, $n \ge 1$, $m \ge 3$;

$A_2 = Mod\{xyz = u^2, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{25}$ $n \geq 3$, $m \geq 2$.

Здесь $x\ x_2 \dots x_{n-1} x = x x_{i_2} \dots x_{i_{m-1}} x$ $(1)^{25}$, $n \geq 3$, $m \geq 2$. Ясно, что из $xyx = xzx$ следуют все тождества вида $(1)^{25}$, где $(1)^{25}$ $n, m \geq 3$. При $m = 2$ получим $xyx = x^2$, однако $xyx = xzx$ следует из $xyx = x^2$. Таким образом, $Mod\{xyx = x^2\} \subseteq \bigcap\limits_{n \geq 3, m \geq 2} D_{25}^{n,m} = D_{25}$. Обратное, $D_{25} \subseteq Mod\{xyx = x^2\}$, а это означает, что $D_{25} = Mod\{xyx = x^2\}$.

$D_{26} = P_{2,6} = A_2 + I_6$.

$I_6 = Mod\{x = x^2, xyz = yxz\}$, тогда в $(1)^{26}$ $c(x_1 x_2 \dots x_n) = c(y_1 y_2 \dots y_m), x_n = y_m$;

$A_2 = Mod\{xyz = u^2, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{26}$ $n \geq 3$, $m \geq 2$.

Здесь $x_1 x_2 \dots x_{n-1} x = x_{i_1} \dots x_{i_{m-1}} x$ $(1)^{26}$, $n \geq 3$, $m \geq 2$. Для $n, m \geq 3$ $(1)^{26}$ следует из $xyz = yxz$. При $n = 3$, $m = 2$ получим $x^2 = x^3$. Таким образом, $Mod\{xyz = yxz, x^2 = x^3\} \subseteq \bigcap\limits_{n \geq 3, m \geq 2} D_{26}^{n,m} = D_{26}$. С другой стороны,

$D_{26} \subseteq Mod\{xyz = yxz, x^2 = x^3\}$, откуда следует, что

$D_{26} = Mod\{xyz = yxz, x^2 = x^3\}$.

$D_{27} = P_{2,8} = A_2 + I_8$.

$I_8 = Mod\{x = x^2, xyzx = xzyx\}$, тогда в $(1)^{27}$ $c(x_1 x_2 \dots x_n) = c(y_1 y_2 \dots y_m)$, $x_1 = x_n = y_1 = y_m$;

$A_2 = Mod\{xyz = u^2, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{27}$ $n \geq 3$, $m \geq 2$.

Здесь $x x_2 \dots x_{n-1} x = x x_{i_2} \dots x_{i_{m-1}} x$ $(1)^{27}$, $n \geq 3$, $m \geq 2$. При $n, m \geq 4$ $(1)^{27}$ легко выводится из $xyzx = xzyx$. Рассмотрим остальные случаи.

1. $n = 3$, $m = 4$ (случай $n = 4$, $m = 3$ аналогичен), получим тождества $xyx = x^2 yx, xyx = xy^2 x, xyx = xyx^2$. По *лемме 1*, эти тождества выполняются в многообразии D_{27}.

2. $n = 3$, $m = 3$, получим $xyx = xyx$ (тривиальное тождество).

3. $n = 3$, $m = 2$, получим $x^2 = x^3$.

Отсюда следует, что $Mod\{xyzx = xzyx, x^2 = x^3\} \subseteq \bigcap\limits_{n \geq 3, m \geq 2} D_{27}^{n,m} = D_{27}$.

С другой стороны, $D_{27} \subseteq Mod\{xyzx = xzyx, x^2 = x^3\}$, следовательно, $D_{27} = Mod\{xyzx = xzyx, x^2 = x^3\}$.

$D_{28} = P_{3,2} = A_3 + I_2$.

$I_2 = Mod\{x = x^2, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{28}$ $c(x_1 x_2 \dots x_n) = c(y_1 y_2 \dots y_m)$;

$A_3 = Mod\{xyz = u^3, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{28}$ $n, m \geq 3$.

Ясно, что в D_{28} выполняется $xy = yx$, а также тождества вида $x_1x_2...x_n = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_m}$ $(1)^{28}$, где $n,m \geq 3$. Из $xyz = yxz, xyz = xzy$ и тождеств дистрибутивности следуют $(1)^{28}$. Но из $xy = yx$ вытекают тождества $xyz = yxz, xyz = xzy$, а следовательно, и $(1)^{28}$. Итак, мы получили, что $Mod\{xy = yx\} \subseteq \bigcap\limits_{n,m\geq 3} D_{28}^{n,m} = D_{28}$. Обратное, $D_{28} \subseteq Mod\{xy = yx\}$, откуда следует, что $D_{28} = Mod\{xy = yx\}$.

$D_{29} = P_{3,1} = A_3 + I_1$.

$I_1 = Mod\{x = xy\}$, следовательно, в $(1)^{29}$ $x_1 = y_1$;

$A_3 = Mod\{xyz = u^3, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{29}$ $n,m \geq 3$.

Таким образом, $xx_2...x_n = xy_2...y_m$ $(1)^{29}$, $n,m \geq 3$. Ясно, что из тождеств $xyz = xuv$ следуют все тождества вида $(1)^{29}$, а следовательно, $Mod\{xyz = xuv\} \subseteq \bigcap\limits_{n,m\geq 3} D_{29}^{n,m} = D_{29}$. С другой стороны, $D_{29} \subseteq Mod\{xyz = xuv\}$, откуда следует, что $D_{29} = Mod\{xyz = xuv\}$.

$D_{30} = P_{5,2} = A_5 + I_2$.

$I_2 = Mod\{x = x^2, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{30}$ $c(x_1x_2...x_n) = c(y_1y_2...y_m)$;

$A_5 = Mod\{xyz = u^3\}$, следовательно, в $(1)^{30}$ $n,m \geq 3$.

Таким образом, $x_1x_2...x_n = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_m}$ $(1)^{30}$, $n,m \geq 3$. Из тождеств $xyz = yxz, xyz = xzy$ следуют все тождества вида $(1)^{30}$.

Таким образом, $Mod\{xyz = yxz, xyz = xzy\} \subseteq \bigcap\limits_{n,m\geq 3} D_{30}^{n,m} = D_{30}$. С другой стороны, $D_{30} \subseteq Mod\{xyz = yxz, xyz = xzy\}$, а это значит, что $D_{30} = Mod\{xyz = yxz, xyz = xzy\}$.

$D_{31} = P_{3,3} = A_3 + I_3$.

$I_3 = Mod\{x = yx\}$, следовательно, в $(1)^{31}$ $x_n = y_m$;

$A_3 = Mod\{xyz = u^3, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{31}$ $n,m \geq 3$.

Таким образом, $x_1x_2...x = y_1...y_{m-1}x$ $(1)^{31}$, $n,m \geq 3$. Легко видеть, что из $xyz = uvz$ следуют все тождества вида $(1)^{31}$, тогда $Mod\{xyz = uvz\} \subseteq \bigcap\limits_{n,m\geq 3} D_{31}^{n,m} = D_{31}$. С другой стороны, $D_{31} \subseteq Mod\{xyz = uvz\}$, откуда следует, что $D_{31} = Mod\{xyz = uvz\}$.

$D_{32} = P_{3,4} = A_3 + I_4$.

$I_4 = Mod\{x = x^2, xyz = xzy\}$, тогда в $(1)^{32}$ $c(x_1x_2...x_n) = c(y_1y_2...y_m), x_1 = y_1$;

$A_3 = Mod\{xyz = u^3, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{32}$ $n, m \geq 3$.

Таким образом, $xx_2 ... x_n = xx_{i_2} ... x_{i_m}$ $(1)^{32}$, $n, m \geq 3$. Ясно, что из тождества $xyz = xzy$ следуют все тождества вида $(1)^{32}$, следовательно, $Mod\{xyz = xzy\} \subseteq \bigcap\limits_{n,m\geq 3} D_{32}^{n,m} = D_{32}$. Обратное, $D_{32} \subseteq Mod\{xyz = xzy\}$, откуда следует, что $D_{32} = Mod\{xyz = xzy\}$.

$D_{33} = P_{3,5} = A_3 + I_5$.

$I_5 = Mod\{x = x^2, x = xyx\}$, тогда в $(1)^{33}$ $x_n = x_m = y_1 = y_m$, $n \geq 1$, $m \geq 3$;

$A_3 = Mod\{xyz = u^3, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{33}$ $n, m \geq 3$.

Таким образом, $x_1 x_2 ... x_{n-1} x = xy_2 ... y_{m-1} x$ $(1)^{33}$, $n, m \geq 3$. Из тождества $xyx = xzx$ легко выводятся все тождества вида $(1)^{33}$. Это означает, что $Mod\{xyx = xzx\} \subseteq \bigcap\limits_{n,m\geq 3} D_{33}^{n,m} = D_{33}$. С другой стороны, $D_{33} \subseteq Mod\{xyx = xzx\}$, таким образом, $D_{33} = Mod\{xyx = xzx\}$.

$D_{34} = P_{3,6} = A_3 + I_6$.

$I_6 = Mod\{x = x^2, xyz = yxz\}$, тогда в $(1)^{34}$ $c(x_1 x_2 ... x_n) = c(y_1 y_2 ... y_m), x_n = y_m$;

$A_3 = Mod\{xyz = u^3, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{34}$ $n, m \geq 3$.

Таким образом, $x_1 ... x_{n-1} x = x_{i_1} ... x_{i_{m-1}} x$ $(1)^{34}$, $n, m \geq 3$. Ясно, что из $xyz = yxz$ следуют все тождества вида $(1)^{34}$, следовательно, $Mod\{xyz = yxz\} \subseteq \bigcap\limits_{n,m\geq 3} D_{34}^{n,m} = D_{34}$. С другой стороны, $D_{34} \subseteq Mod\{xyz = yxz\}$, откуда следует, что $D_{34} = Mod\{xyz = yxz\}$.

$D_{35} = P_{3,8} = A_3 + I_8$.

$I_8 = Mod\{x = x^2, xyzx = xzyx\}$, тогда в $(1)^{35}$ $c(x_1 x_2 ... x_n) = c(y_1 y_2 ... y_m)$, $x_1 = x_n = y_1 = y_m$;

$A_3 = Mod\{xyz = u^3, xy = yx\}$, следовательно, в $(1)^{35}$ $n, m \geq 3$.

Таким образом, $xx_2 ... x_{n-1} x = xx_{i_2} ... x_{i_{m-1}} x$ $(1)^{35}$, $n, m \geq 3$. Из $xyzx = xzyx$ следуют все тождества вида $(1)^{35}, n, m \geq 4$. Рассмотрим остальные случаи.

1. $n = 3$, $m = 4$ (случай $n = 4$, $m = 3$ аналогичен), получим тождества $xyx = x^2 yx$, $xyx = xy^2 x, xyx = xyx^2$. По *лемме 1*, все эти тождества выполняются в D_{35}.

2. $n = 3$, $m = 3$, получим тривиальное тождество $xyx = xyx$.

Отсюда получим, что $Mod\{xyzx = xzyx\} \subseteq \bigcap_{n,m\geq 3} D_{35}^{n,m} = D_{35}$. Обратное, $D_{35} \subseteq Mod\{xyzx = xzyx\}$, откуда следует, что $D_{35} = Mod\{xyzx = xzyx\}$.

§ 5. Решетка сверхдистрибутивных многообразий полугрупп. Среди многообразий полугрупп $D_0 - D_{35}$ выделим сверхдистрибутивные многообразия, т.е. те многообразия, в которых выполняются сверхтождества дистрибутивности $F(x,F(y,z)) = F(F(x,y),F(x,z))$ (d_1) и $F(F(x,y),z) = F(F(x,z),F(y,z))$ (d_2).

Теорема 1. Многообразия полугрупп $D_0 - D_9, D_{11}, D_{13} - D_{28}$ сверхдистрибутивны, в остальных многообразиях полугрупп сверхтождества d_1, d_2 не выполняются.

Доказательство. Критериями выполнимости сверхтождеств левой и правой дистрибутивности являются выполнимость тождеств $x^2 = x^3$, $xyz = xyxz, xyz = xzyz$ [2]. Последние два тождества выполняются в каждом многообразии $D_i, i = \overline{0,35}$. В $D_0 - D_7$ выполняется $x^2 = x^3$ (следует из $x = x^2$). Легко видеть, что в A_1, A_2, A_4 также выполняется тождество $x^2 = x^3$, если в $xy = zx$ взять $y = x$, $z = x^2$, а в тождестве $xyz = u^2$ – $y = z = u = x$.

Таким образом, в $D_0 - D_9, D_{11}$, а также в $D_{13} - D_{28}$ выполняется $x^2 = x^3$, а следовательно, и сверхтождества левой и правой дистрибутивности.

В A_3, A_5 тождество $x^2 = x^3$ не выполняется, так как для любого $u = v$, которое выполняется в A_3 или в A_5, $n(u), n(v) \geq 3$ (следует из тождества $xyz = u^3$), а $n(x^2) = 2 < 3$.

Предложение 5. Решетка сверхдистрибутивных многообразий полугрупп не модулярна, а следовательно, и решетка дистрибутивных многообразий полугрупп тоже не модулярна.

Доказательство. Решетка сверхдистрибутивных многообразий полугрупп содержит немодулярную 5-элементную подрешетку, состоящую из элементов $D_0, D_8, D_9, D_{20}, D_1$, где $D_0 \subseteq D_8 \subseteq D_9 \subseteq D_{20}, D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_{20}$, а значит, эта решетка не модулярна [3]. Так как решетка сверхдистрибутивных многообразий полугрупп является подрешеткой решетки дистрибутивных многообразий полугрупп, то и решетка дистрибутивных многообразий полугрупп также не модулярна.

Кафедра алгебры и геометрии *Поступила 13.05.2003*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kepka T.** – Acta universitatis carolinat – mathematica et phisica, 1983, v. 25, № 1.

2. **Мовсисян Ю.М., Симонян И.Р.** – Ученые записки ЕГУ, 2000, № 1.
3. **Биркгоф Г.** Теория решеток. М.: Наука, 1984.

Ի. Ռ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ԲԱՇԽԱԿԱՆ ԵՎ ԳԵՐԲԱՇԽԱԿԱՆ ԿԻՍԱԽՄԲԵՐԻ ԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԱՎԱՐՆԵՐ

Ամփոփում

Այս աշխատանքում տրվում են բոլոր բաշխական և գերբաշխական կիսախմբերի բազմաձևությունները և նկարագրվում են նրանց ենթաբազմաձևությունների կավարները:

I. R. SIMONYAN

LATICES OF DISTRIBUTIVE AND HYPERDISTRIBUTIVE VARIETIES OF SEMIGROUPS

Summary

In this work has been found all distributive and hyperdistributive varieties of semigroups and also are described lattices of subvarieties of them.