ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2004 Естественные науки

Математика

УДК 519.95

А. О. АПИНЯН

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В настоящей работе рассмотрена дискретная модель задачи оптимизации борьбы с загрязнением окружающей среды. Использованы метод динамической оптимизации и основанный на методе «возврата» алгоритм случайного поиска. Предложена сплайн-аппроксимация оптимального решения.

1^0. Введение. В мире нарастает беспокойство в связи с масштабами загрязнения воздуха, воды, почвы. Анализируются стратегии борьбы с этим явлением и соответствующие математические модели оптимизации [1–5]. В моделях в момент $t \in [t_0, T]$ выпуск продукции – капитал – распределяют между накоплением капитала $K(t)$, потреблением $c(t)$ и борьбой с загрязнением $P(t)$.

На основе функции полезности $u(c,P)$ максимизируют общее благосостояние

$$W(c,P) = \int_{t_0}^{T} u(c(t),P(t))e^{-rt}dt, \tag{1}$$

где $r > 0$ – константа при «гладкости» введенных величин.

Например, в [5] введены внешние переменные: a – скорость распыления капитала, b – скорость очистки загрязнителя, d – уменьшение загрязнения при уменьшении потребления на единицу.

Далее, в [5] определены производственная функция $f(.)$, доля потребления $\alpha(t)$ и доля капитала $\beta(t)$, выделенная на борьбу с загрязнением в момент t.

Модель описана уравнениями

$$c(t) = \alpha(t) f(K(t)), \quad t \in [t_0, T],$$

и

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = (1-\alpha(t)-\beta(t))f(K(t)) - aK(t), \\ \dot{P}(t) = (1-d\beta(t))f(K(t)) - bP(t) \end{cases} \tag{2}$$

при начальных условиях $\alpha(t_0)=\beta(t_0)=0$, $K(t_0)=K_0$, $P(t_0)=P_0$ и ограничениях

$$\alpha(t)+\beta(t)\le M . \tag{3}$$

В (2) точка над функциями означает ее производную по времени.

В [5] доказано существование оптимального решения (c,K,P) задачи (1)–(3). ►

Определим разбиение $[t_0,T]$ на узлы:

$$\Delta:\ t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T \tag{4}$$

и осуществим дискретизацию задачи:

$$\begin{cases} K(t_i)=\dfrac{1}{1+a\Delta t_i}\{(1-\alpha(t_i)-\beta(t_i))f(K(t_i))\Delta t_i+K(t_{i+1})\}, \\ P(t_i)=\dfrac{1}{1+b\Delta t_i}\{(1-d\beta(t_i))f(K(t_i))\Delta t_i+P(t_{i+1})\}, \end{cases} \tag{5}$$

где $\Delta t=t_i-t_{i-1}$ при ограничениях

$$\alpha(t_i)+\beta(t_i)\le M, \qquad i=\overline{0,n}. \tag{6}$$

Выберем позицию $(\overline{K},\overline{P})$, где $\overline{K}$ и $\overline{P}$ – значения капитала и загрязнения в момент T соответственно, которой с целью приближенного решения задачи мы собираемся достичь.

Вводим *критерий* оптимальности.

Траекторию $(K(t),P(t))$ на $[t_0,T]$ называем *оптимальной*, если расстояние D при $t\in[t_0,T]$ удовлетворяет условию

$$D((K(t),P(t)),(\overline{K},\overline{P}))=\min_{(K'(t),P'(t))} D((K'(t),P'(t)),(\overline{K},\overline{P})). \tag{7}$$

Условие (7) в дальнейшем упоминается как *условие А* оптимизации задачи (4)–(7). ►

2^0. Численный метод. Прежде всего, следует определить процедуру построения $\alpha(t_i)=\alpha(t_{i-1})+\Delta\alpha(t_i)$ и $\beta(t_i)=\beta(t_{i-1})+\Delta\beta(t_i)$, $i=\overline{1,n}$, в уравнениях (5). Приращения $\Delta\alpha(t_i)$ и $\Delta\beta(t_i)$, $i=\overline{1,n}$, определяем с помощью алгоритма случайного поиска, основанного на методе «возврата»:

$$\begin{cases} \Delta\alpha(t_i)=\begin{cases} q\lambda_{i-1} & \textit{при условии } A, \\ -\Delta\alpha(t_{i-1}) & \textit{в противном случае}; \end{cases} \\ \Delta\beta(t_i)=\begin{cases} q\sigma_{i-1} & \textit{при условии } A, \\ -\Delta\beta(t_{i-1}) & \textit{в противном случае}. \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

В (8) последовательности $\{\lambda_i\}$ и $\{\sigma_i\}$ выбираются с помощью генерации случайных чисел, а q и s – шаги метода случайного поиска [6].

Из (8) определяем приращения, подставляем их в (5). Именно вначале находим $K(t_i)$ из первого уравнения (5), затем $P(t_i)$ из второго.

Далее, проверяем *условие A*. Если оно выполнено, то переходим к следующему шагу. В противном случае процедура с новым набором $\{\lambda_i\}$ и $\{\sigma_i\}$ повторяется.

При L выборках размера n случайных чисел вероятность попадания хотя бы одного из чисел в Δ-окрестность оптимума равна $P_\Delta(L)=1-(1-\Delta^n)^L$ [6].

Выбрав Δ, n и $P_\Delta(L)$, находим $L=\dfrac{\ln(1-P_\Delta(L))}{\ln(1-\Delta^n)}$.

Наконец, следует удовлетворить (6). Достаточным условием справедливости (6) служит

$$v=\max(s,q)\le\frac{M}{\sum_{k=0}^{i-1}(\lambda_k+\sigma_k)}. \tag{9}$$

Действительно, $\alpha(t_i)=\sum_{k=1}^{i}\Delta\alpha(t_k)=q\sum_{k=1}^{i}\lambda_{k-1}$, $\beta(t_i)=\sum_{k=1}^{i}\Delta\beta(t_k)=s\sum_{k=1}^{i}\sigma_{k-1}$ и (6) приобретает вид $q\sum_{k=1}^{i}\lambda_{k-1}+s\sum_{k=1}^{i}\sigma_{k-1}\le M$, откуда следует (9). ▶

Согласно алгоритму случайного поиска, мы получаем последовательности значений

$$\{K(t_i)\},\ \{P(t_i)\},\ \{\alpha(t_i)\},\ \{\beta(t_i)\}. \tag{10}$$

Пусть g – одна из функций K,P,α,β и т. д. Определим следующие эрмитовы сплайны третьей степени при $t\in[t_i,t_{i+1}]$:

$$\tilde g(t)=\varphi_1(x)g(t_i)+\varphi_2(x)g(t_{i+1})+\varphi_3(x)(g(t_i)-g(t_{i-1}))+\varphi_4(x)(g(t_{i+1})-g(t_i)), \tag{11}$$

где, согласно [7], $x=(t-t_i)/\Delta t_{i+1}$ и

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x)=(1-x^2)(1+2x), && \varphi_2(x)=x^2(3-2x), \\ &\varphi_3(x)=x(1-x)^2, && \varphi_4(x)=-x^2(1-x). \end{aligned} \tag{12}$$

Выясняется, что сплайн-аппроксимация типа (11), (12) для оптимального решения $(c(t), P(t))$ задачи (4)–(7) осуществляет «хорошее» приближение решения. ▶

3^0. Основной результат. Введем следующее

Условие B. Пусть B_1, B_2, B_3 – положительные константы и

$$\left\|u(c,P)-u\left(c,\widetilde{P}\right)\right\| \le B_1\left\|P-\widetilde{P}\right\|,$$
$$\left\|u\left(c,\widetilde{P}\right)-u\left(\widetilde{c},\widetilde{P}\right)\right\| \le B_2\left\|c-\widetilde{c}\right\|,$$
$$\left\|f(K)-f\left(\widetilde{K}\right)\right\| \le B_3\left\|K-\widetilde{K}\right\|,$$

где $(c(t), K(t), P(t))$ – оптимальное решение задачи (1)–(3).

Положим $\dot{g}(t)=\dfrac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}$. Обозначим

$$\varepsilon=\max_{0\le i<n}\left(e^{r\Delta t_i}-1\right),\ \omega_i(g)=\max_{t',t''\in[t_i,t_{i+1}]}\left|g(t')-g(t'')\right|, \quad i=\overline{0,n-1},$$

$$\overline{\omega}_i=\max\left(\omega_i\left(\dot{P}\right),\omega_i\left(\dot{K}\right),\omega_i(\dot{\alpha})\right),\ \overline{\omega}=\max_{0\le i<n}\overline{\omega}_i,$$

$$Q=\max\left\{B_1,B_2,B_3,M,\left\|f\left(\widetilde{K}\right)\right\|\right\},\ B=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{r}Q\overline{\omega}_i e^{-rt_{i+1}}\left(\frac{81}{50}+\frac{3}{2}Q\right).$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть $\alpha(t), \beta(t), K(t), P(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[t_i, T]$, выполнено *условие B*, (c,P) – оптимальное решение задачи (4)–(7), $\left(\widetilde{c},\widetilde{P}\right)$ – сплайн-аппроксимация оптимальной траектории (c,P).

Тогда $\left\|W(c,P)-W\left(\widetilde{c},\widetilde{P}\right)\right\|<\varepsilon\omega B.$

Таким образом, приведена процедура получения численного приближения для решения задачи динамической оптимизации (4)–(7). ▶

Приложение. Приведем доказательство *теоремы.*

Так как

$$\| W(c,P)-W(\widetilde{c},\widetilde{P})\| \le \sum_{i=0}^{n-1}\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}(u(c,P)-u(c,\widetilde{P}))e^{-rt}dt\| + \sum_{i=0}^{n-1}\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}(u(c,\widetilde{P})-u(\widetilde{c},\widetilde{P}))e^{-rt}dt\|,$$

то из *условия B* следует

$$\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}(u(c,P)-u(c,\widetilde{P}))e^{-rt}dt\| \le B_1 \| P-\widetilde{P}\| \frac{e^{-rt_{i+1}}}{r}\left(e^{r\Delta t_i}-1\right),$$

$$\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}(u(c,\widetilde{P})-u(\widetilde{c},\widetilde{P}))e^{-rt}dt\| \le B_2 \| c-\widetilde{c}\| \frac{e^{-rt_{i+1}}}{r}\left(e^{r\Delta t_i}-1\right).$$

Далее, по теореме 2.5 из [7],

$$\left\|P-\widetilde{P}\right\| \le \frac{3}{25}\omega_i\left(\dot{P}\right). \tag{13}$$

Так как $c(t)=\alpha(t)f(K)$, то, по теореме 2.5 из [7],

$$\left\|c-\widetilde{c}\right\| \le MB_3\frac{3}{2}\omega_i(\dot{K})+\left\|f(K)\right\|\frac{3}{2}\omega_i(\dot{\alpha}) . \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует

$$\begin{aligned}
&\| \int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(u(c,P)-u\left(c,\widetilde{P}\right)\right)e^{-rt}dt \| + \| \int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(u\left(c,\widetilde{P}\right)-u\left(\widetilde{c},\widetilde{P}\right)\right)e^{-rt}dt \| \le \\
&\le B_1\frac{3}{25r}\omega_i\left(\dot{P}\right)e^{-rt_{i+1}}\left(e^{r\Delta t_i}-1\right)+ \\
&+\frac{B_2}{r}e^{-rt_{i+1}}\left(e^{r\Delta t_i}-1\right)\left(MB_3\frac{3}{2}\omega_i\left(\dot{K}\right)+\| f\left(\widetilde{K}\right)\| \frac{3}{2}\omega_i\left(\dot{\alpha}\right)\right) \le \\
&\le \frac{1}{r}Q\overline{\omega}_i e^{-rt_{i+1}}\left(e^{r\Delta t_i}-1\right)\left(\frac{81}{50}+\frac{3}{2}Q\right) .
\end{aligned} \tag{15}$$

Из (14) и (11) получаем

$$\left\|W(c,P)-W(\widetilde{c},\widetilde{P})\right\| \le \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{r}Q\overline{\omega}_i e^{-rt_{i+1}}(e^{r\Delta t_i}-1)(\frac{81}{50}+\frac{3}{2}Q) < \varepsilon B\overline{\omega}.$$

Теорема доказана.

Кафедра математического моделирования в экономике

Поступила 03.10.2003

ЛИТЕРАТУРА

1. **W. de Vies.** Philosophy, Structure and Application Methodology of a Soil Acidification. Model for Netherlands. In Impact Models to Asses Regional Acidification. Ed. By J. Kamari, IIASA, Kluwer Academic Publishers, Luxemburg, Austria, 1999, p. 3–22.
2. **Brodersen K., Christiansen H., Larsen B.R., Petersen T.** Effects of Acid Deposition on Agricultural Soils During and after Use. Ed. By J. Kamari. IIASA, Kluwer Academic Publishers, Luxemburg, Austria, 1999, p. 23–31.
3. **Yasuko K.** A Comparative Analysis of Decision. International Environmental Affairs. 1997, v. 9, № 2, p. 195–203.
4. **Arakelyan A.H., Simonyan H.S.** Dynamic Multiple Objective Decision Support System to Provide the Monitoring and Management the Carbon Dioxide Emission // MOPGP OO. The Fourth International Conference on multi-Objective Goal Programming. Theory & Applications. Ustron, Poland, 2000, p. 17–21.
5. **Килер Э., Спен М., Зенхаузер Р.** Оптимальный контроль над загрязнением окружающей среды. Математическая экономика. Ред. Б.С. Митягин. М.: Мир, 1974, с. 46–63.
6. **Растригин Л.А., Рипа К.К., Тарасенко Г.С.** Адаптация случайного поиска. Рига: Зинатне, 1978.
7. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошенко В.Л.** Сплайн функции. М.: Наука, 1980.

Ա. Հ. ԱՓԻՆՅԱՆ

ԴԻՆԱՄԻԿ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԹՎԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է շրջակա միջավայրի աղտոտման դեմ պայքարի օպտիմալացման մոդել: Օգտագործված են դինամիկ օպտիմալացման մեթոդ և պատահական որոնման ալգորիթմ՝ հիմնված «վերադարձի» եղանակի վրա: Առաջարկված է օպտիմալ լուծման սպլայնմոտարկում:

A. H. APINIAN

NUMERICAL METHOD OF SOLUTION OF ONE DYNAMIC OPTIMIZATION PROBLEM

Summary

The paper considers the discrete optimization of the model of the struggle against the pollution of the surrounding environment. The dynamic optimization method which is based on the stochastic search algorithm «return» method is used. It is proposed to use the optimal spline approximation solution.