ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ * СООБЩЕНИЯ

Математика

УДК 519.217

С. М. НАРИМАНЯН, Т. З. ХАЧИКЯН

О РАВНОМЕРНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОСТИ В СМЫСЛЕ АРНОЛЬДА–КРЫЛОВА ПОДГРУПП ГРУППЫ ЛИ

В работе доказывается, что всякая всюду плотная в группе Ли сильно лиувиллева подгруппа с конечным числом образующих равномерно распределена в смысле Арнольда–Крылова.

Сначала введем необходимые нам в дальнейшем понятия.

Пусть X_n – однородная марковская цепь со значениями в фазовом пространстве (E, B), где E – счетное множество, B – класс всех подмножеств пространства E, и с переходными вероятностями $p(n,x,y)$, $x,y \in E$. Везде предполагается, что рассматриваемые цепи неприводимы и непериодичны. Тогда известно (см., напр., [1]), что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p(n,x,y)}$ и не зависит от x и y. Обратную величину этого предела обозначим через ρ и назовем спектральным радиусом цепи X_n. Оператор усреднения P, связанный с цепью X_n, действует в пространстве B-измеримых функций по формуле

$$Pf(x) = \sum_{y\in E} p(x,y)f(y).$$

Функция $f \geq 0$ называется гармонической для X_n, если $Pf = f$. Множество гармонических функций образует выпуклый конус, крайние точки которого называются минимальными гармоническими функциями.

В дальнейшем будем считать, что E – группа с единицей e. Если переходные вероятности удовлетворяют условию $p(x,y) = p(e, x^{-1}y)$ (тогда, конечно, $p(gx, gy) = p(x,y)$ для любого $g \in E$), то говорят, что цепь X_n инвариантна слева. Инвариантные марковские цепи в E будем называть случайными блужданиями на группе E. Случайное блуждание на E называется симметричным, если $p(e, x^{-1}) = p(e,x)$ для любого $x \in E$.

Определение. Группу E назовем лиувиллевой (см. [2]), если для любого симметричного случайного блуждания на E все ограниченные гармонические функции постоянны, и сильно лиувиллевой, если все гармонические функции постоянны. Например, абелевы и нильпотентные группы сильно лиувиллевы [2].

Пусть Γ – группа Ли, $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ – ее элементы, а Γ_ν – подгруппа в Γ, порожденная элементами $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$. Пусть $N_n(G)$ – число элементов $\Gamma_\nu \cap G$, представимых словами длины не более n, где G – область в Γ с компактным замыканием. Скажем, что подгруппа Γ_ν равномерно распределена в Γ в смысле Арнольда–Крылова [3], если для любых областей G_1, G_2 с компактными замыканиями имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(G_1)}{N_n(G_2)} = \frac{\mu(G_1)}{\mu(G_2)}, \tag{1}$$

где μ – левоинвариантная мера Хаара на Γ.

Теорема. Всякая всюду плотная в Γ сильно лиувиллева подгруппа с конечным числом образующих равномерно распределена в Γ в смысле Арнольда–Крылова.

Доказательство. Пусть Γ_ν – всюду плотная в Γ сильно лиувиллева подгруппа группы Γ, $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ – ее образующие. Рассмотрим на Γ_ν симметричное случайное блуждание вида $p(e, a_i) = p(e, a_i^{-1}) = 1/2\nu$. Пусть $P(n, e, G) = \sum_{y\in G} p(n, e, y)$. Тогда $N_n(G) = (2\nu)^n P(n, e, G)$ и поэтому (см. [4])

$$\frac{N_n(G)}{N_n(gG)} \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Другими словами, для любых конгруэнтных областей G_1, G_2 имеем

$$\frac{N_n(G_1)}{N_n(G_2)} \to 1, \qquad n \to \infty. \tag{2}$$

Чтобы доказать справедливость соотношения (1), нам нужен следующий геометрический результат, представляющий самостоятельный интерес.

Лемма. Пусть $D \subset \Gamma$ – область с компактным замыканием и кусочно-гладкой границей ∂D. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такая область D_ε с кусочно-гладкой границей ∂D_ε, $e \in \partial D_\varepsilon$, и такие элементы $g_1, \ldots, g_{N_-(\varepsilon)}$; $\tilde{g}, \ldots, \tilde{g}_{N_+(\varepsilon)}$, что

$$\bigcup_{i=1}^{N_-(\varepsilon)} g_i D_\varepsilon \subseteq D \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_+(\varepsilon)} \tilde{g}_i D_\varepsilon, \quad g_i D_\varepsilon \cap g_j D_\varepsilon = \varnothing, \quad i \neq j, \quad \text{и} \quad \left| \frac{N_+(\varepsilon)}{N_-(\varepsilon)} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что область D лежит в римановой координатной системе, содержащей e. В противном случае ее можно разрезать на конечное число кусков и, сдвинув каждый из них в окрестность e, провести рассуждения для каждого из них по отдельности.

Рассмотрим $\exp^{-1} D \subset T_e(G)$ (см. [5]) и снабдим касательное пространство $T_e(G)$ прямоугольной декартовой системой координат, согласованной в $T_e(G)$ левоинвариантной римановой метрикой на Γ. Другими словами, рассмотрим D в римановых координатах с центром в e. Разобьем $T_e(G)$ на кубы с ребром $e^{2/3}$, образующие правильную решетку. Число этих кубов, покрывающих $\exp^{-1} D$, имеет порядок $e^{-2\nu/3} mesD$, где $\nu = \dim \Gamma$. Пусть Q_i – один из этих кубов, O_i – его центр, $\widetilde{Q}_i = \exp^{-1} Q_i$, $\widetilde{O}_i = \exp^{-1} O_i$ – их образы при экспоненциальном отображении $T_e(G)$ в G. Разумеется, множества $\widetilde{Q}_i$ не конгруэнтны, однако их размеры порядка $\varepsilon^{2/3}$, а границы $\partial\widetilde{Q}_i$ равномерно по i кусочно-гладкие. Сдвинем $\widetilde{Q}_i$ так, чтобы $\widetilde{O}_i$ совпало с e. Обозначим новое множество через $\widetilde{\widetilde{Q}}_i$. Заметим, что вблизи e в римановых координатах метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{\nu} dx_i^2 (1 + Q_i(x)) + \sum_{i,j} dx_i dx_j Q_{ij}(x),$$

где функции $Q_i(x)$ и $Q_{ij}(x)$ – второго порядка малости по $|x|$. Так как $diam Q_i = O(\varepsilon^{2/3})$, то на всем этом множестве

$$\left(1 - c\varepsilon^{4/3}\right) \sum_{i=1}^{\nu} dx_i^2 \le ds^2 \le \sum_{i=1}^{\nu} dx_i^2 \left(1 + ce^{4/3}\right). \tag{3}$$

Здесь c – некоторая постоянная, равномерная по i.

Возьмем теперь в качестве D_ε образ куба с центром e и ребром ε при экспоненциальном отображении $T_e(G)$ в G. В силу (2) нетрудно показать, что такие кубы (после надлежащих сдвигов) покрывают $\widetilde{\widetilde{Q}}_i$ так, что $\left| \dfrac{N_+\left(\varepsilon, \widetilde{\widetilde{Q}}_i\right)}{N_-\left(\varepsilon, \widetilde{\widetilde{Q}}_i\right)} - 1 \right| \le c\varepsilon^{1/3}$ равномерно по i. Отсюда немедленно следует утверждение леммы.

Следствие леммы. Пусть D_1, D_2 – две области с кусочно-гладкими границами. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такая область D_ε и такие покрытия (в смысле леммы), что

$$\left| \frac{N_+(\varepsilon, D_1)}{N_-(\varepsilon, D_2)} - \frac{\mu(D_1)}{\mu(D_2)} \right| \le \varepsilon, \qquad \left| \frac{N_-(\varepsilon, D_1)}{N_+(\varepsilon, D_2)} - \frac{\mu(D_1)}{\mu(D_2)} \right| \le \varepsilon.$$

Наконец, для завершения доказательства теоремы следует применить следствие леммы с учетом соотношения (2).

*Кафедра теории вероятностей
и математической статистики*

Поступило 04.12.2003

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нариманян С.М.** – Вестник МГУ, Мат., Мех., 1975, № 6, с.17–24.
2. **Нариманян С.М.** – Ученые записки ЕГУ, 1977, № 2, с.3–7.
3. **Арнольд В.Н., Крылов А.Н.** – ДАН СССР, 1963, т. 14, № 1, с.1046–1051.
4. **Мовсисян М.Ю., Нариманян С.М.** – Ученые записки ЕГУ, 1999, № 2, с.7–11.
5. **Кириллов А.А.** Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972.

Ս. Մ. ՆԱՐԻՄԱՆՅԱՆ, Տ. Զ. ԽԱՉԻԿՅԱՆ

ԼԻԻ ԽՄԲԻ ԵՆԹԱԽՄԲԵՐԻ ԱՌՆՈԼԴԻ–ԿՌԻԼՈՎԻ ԻՄԱՍՏՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԲԱՇԽՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ Լիի խմբի յուրաքանչյուր ամենուրեք խիտ, ուժեղ լիուվիլյան վերջավոր թվով ծնիչներով ենթախումբ հավասարաչափ է բաշխված այդ խմբում Առնոլդի–Կրիլովի իմաստով:

S. M. NARIMANYAN, T. Z. KHACHIKYAN

ON THE UNIFORM DISTRIBUTION OF LEE GROUP'S SUBGROUPS IN SENSE OF ARNOLD–KRILOV

Summary

The result of the present work sounds as follows. In Lee's group, any everywhere dense strongly liuvilial subgroup generated by finite number of group elements is uniformly distributed in the sense of Arnold–Krilov.