

Математика

УДК 517.946:532.591

Յ. Ա. ԳՐԻԳՐՅԱՆ, Տ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ, Գ. Գ. ՕԳԱՆՅԱՆ

**ТОЧНЫЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
 КЛЕЙНА–ГОРДОНА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ
 ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

Получено новое аналитическое решение уравнения Клейна–Гордона, которое описывает известную эволюцию уединенной волны, перемежающейся, однако, с меньшей амплитудой и со сверхзвуковой скоростью. Для того же уравнения с диссипацией (вязкостью) построены точные частные решения структуры ударных волн.

1. Основные уравнения. Рассматривается монодисперсная смесь вязкой сжимаемой жидкости с малым объемным содержанием пузырьков калорически совершенного газа. Предполагается отсутствие процессов дробления, слипания и образования новых пузырьков. В таких средах общий механизм диссипации формируется из составляющих за счет межфазного теплообмена, вязкости и сжимаемости [1–4]. При адиабатическом предельном режиме термодинамического поведения газа в пузырьках, размеры которых достаточно велики, межфазный теплообмен отсутствует. Тогда нелинейное распространение волны давления в смеси опишется двухволновым уравнением [2–3]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} - \frac{4 \mu}{3 \rho_0} \left(1 + \frac{\rho_0 a_0^2}{\gamma p_0} \right) \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} + \frac{4 \mu}{3 \gamma p_0} \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} + \frac{1}{\omega_r^2} \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (1.1)$$

$$\alpha = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{\gamma p_0} + m \frac{(1 - \beta_0) p_0}{\rho_{10} a_{10}^2} \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2}, \quad m = \frac{1}{a_{10}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 a_1) \right]_0,$$

$$\omega_r^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_{10} R_0^2}, \quad \frac{1}{a_0^2} = \frac{(1 - \beta_0) \rho_0}{\rho_{10} a_{10}^2} + \frac{\beta_0 \rho_0}{\gamma p_0}, \quad \rho_0 = (1 - \beta_0) \rho_{10} + \beta_0 \rho_{20}.$$

Здесь t – время, x – пространственная координата, $p = \frac{P}{P_0 - 1}$ – избыточное значение давления P , ρ – плотность, R – радиус пузырька, a – скорость звука, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – показатель адиабаты газа, c_p и c_v – удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме, $\beta_0 \ll 1$ – объемное газосодержание. Индексы «1», «2» и «0» отнесены соответственно к параметрам жидкости, газа и состоянию равновесия (покоя) смеси, ω_r – адиабатическая резонансная частота пузырька (частота Миннаерта).

При другом предельном режиме изотермического поведения газа в достаточно мелких пузырьках межфазный теплообмен опять-таки отсутствует. Распространение волн вновь опишется уравнением (1.1), в котором формально можно полагать $\gamma = 1$.

Особенностью газожидкостной смеси является иерархия процесса распространения волн. В линейном приближении, после вхождения исходного возмущения в смесь, его высокочастотная ($\omega > \omega_r$) составляющая распространяется в виде предвестника – быстрой волны [2–3] – со скоростью, почти совпадающей со скоростью звука a_{10} в чистой жидкости. Вслед за ней перемещается низкочастотная часть импульса в виде медленной волны ($\omega < \omega_r$) со скоростью звука в смеси a_0 , что подтверждается структурой уравнения (1.1).

Исследуем поведение быстрой волны. Не теряя общности в постановке задачи, примем упрощающие предположения, облегчающие последующие выкладки и приводящие к наглядным результатам. При определении коэффициента нелинейности α пренебрегается составляющей, которая характеризует сжимаемость. Поскольку масса газа ничтожно мала в сравнении с массой жидкости, т.е. $\rho_{20}\beta_0 \ll \rho_{10}(1 - \beta_0)$, постольку и $\rho_0 = (1 - \beta_0)\rho_{10}$. В силу малости исходного объемного газосодержания β_0 понятия плотности смеси и жидкости отождествляются: $\rho_0 \approx \rho_{10}$. Тогда

$$\alpha = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \cdot \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{\gamma P_0}, \quad \frac{1}{a_0^2} = \frac{1}{a_{10}^2} + \frac{\beta_0 \rho_0}{\gamma P_0}.$$

В рассматриваемой постановке в уравнении (1.1) главным является волновой оператор высшего порядка, из которого следует $\partial^2/\partial t^2 \approx a_{10}^2 \partial^2/\partial x^2$. Использование этой связи в остальных членах уравнения и последующее двукратное интегрирование по t позволяют привести его к виду

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a_{10}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\omega_r^2}{a_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \omega_r^2 \frac{\beta_0 \rho_0 a_{10}^2}{\gamma P_0} \left(p - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} p^2 \right) = 0,$$

где константы интегрирования взяты равными нулю. Вводя новые переменные

$$u = \frac{\gamma+1}{2\gamma} p, \quad t = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\beta_0 \rho_0}} \cdot \frac{1}{a_{10} \omega_r} t', \quad x = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\beta_0 \rho_0}} \cdot \frac{1}{\omega_r} x', \quad (1.2)$$

перепишем уравнение в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} - \delta \frac{\partial u}{\partial t'} + u - u^2 = 0, \quad \delta = \frac{4}{3} \cdot \frac{\mu}{\rho_0} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\beta_0 \rho_0 a_0^2}} \cdot \frac{\omega_r}{a_0 a_{10}}. \quad (1.3)$$

Здесь штрихи над безразмерными координатами опущены.

Перейдем к построению точных решений уравнения (1.3). Воспользуемся методом, предложенным в [5] и использованным в [6, 7], при решении нелинейных уравнений, неинтегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния. Представим искомое решение уравнения (1.3) в виде разложения Лорана:

$$u(x, t) = u_1 F^{-2} + u_2 F^{-1} + u_3 + \sum_{j=4}^{\infty} u_j F^{j-3}, \quad (1.4)$$

где функции $u_i(x, t)$ и $F(x, t)$ подлежат нахождению ($i=1, 2, 3$). Подставляя (1.4) в (1.3), приравняем к нулю коэффициенты при соответствующих степенях функции F :

$$\text{при } F^{-4} \quad u_1 = 6(F_t^2 - F_x^2), \quad (1.5)$$

$$\text{при } F^{-3} \quad u_2 = -\frac{6}{5}(F_{tt} - F_{xx}) - \frac{24}{5} \cdot \frac{F_t^2 F_{tt} - 2F_t F_x F_{tx} + F_x^2 F_{xx}}{F_t^2 - F_x^2} + \frac{6}{5} \delta F_t.$$

Здесь F_t, F_x, F_{tx} и т.д. – частные производные от $F(x, t)$. Для нахождения u_3, u_j ($j \geq 4$) получаем рекуррентные соотношения.

Однако оказалось, что функция $u_7(x, t)$, определяемая из приравненного нулю коэффициента при F^2 , выпадает в силу определения u_1 из получаемого соотношения. Поскольку рекуррентность нарушается, в (1.4) можно полагать $u_j = 0$ для $j \geq 7$. В связи с этим из выражений коэффициентов при F^5, F^4 и F соответственно получим $u_6 = u_5 = u_4 = 0$. Из совокупности свободных членов (коэффициент при F^0) выясняется, что функция $u_3(x, t)$ удовлетворяет уравнению, по виду совпадающему с (1.3), откуда следуют тривиальные решения $u_3 = 0, u_3 = 1$. Тогда из коэффициента при F^{-1} получим линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} - \delta \frac{\partial u}{\partial t'} \pm u_2 = 0. \quad (1.6)$$

Из приравненного к нулю коэффициента при F^{-2} , в соответствии с полученными значениями u_3 , будем иметь

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t'^2} - 2 \frac{\partial u_2}{\partial t'} F_t - u_2 F_{tt} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x'^2} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x'} F_x + u_2 F_{xx} - \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial t'} - u_2 F_t \right) - u_2^2 \pm u_1 = 0. \quad (1.7)$$

В уравнениях (1.6), (1.7) верхний и нижний знаки (\pm) отнесены соответственно к значениям $u_3 = 0$ и $u_3 = 1$. Подставляя формулы (1.5) в (1.6), (1.7) и комбинируя получаемые соотношения, приходим к уравнению, откуда определится явный вид функции F :

$$F(x, t) = 1 + \exp(kx - \omega t), \quad (1.8)$$

где безразмерные постоянные величины ω и k играют соответственно роли частоты и волнового числа.

Рассмотрим разные варианты уравнения (1.3) и, в соответствии с ними, получим их точные частные решения.

2. Уравнение Клейна–Гордона ($\delta = 0$).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^2 = 0.$$

Уравнение играет фундаментальную роль также в исследованиях различных моделей теории поля, линейной динамики кристаллической решетки [1, 8]. Решение линейного варианта приведено, напр., в [2].

Случай $u_3 = 0$. Подставляя (1.8) в формулы (1.5) и уравнение (1.6), будем иметь

$$u_1 = 6(\omega^2 - k^2) \exp[2(kx - \omega t)], \quad (2.1)$$

$$u_2 = -6(\omega^2 - k^2) \exp(kx - \omega t), \quad \omega^2 - k^2 + 1 = 0.$$

Решение (1.4), записанное в размерных координатах (1.2), предстанет, согласно (2.1), в виде

$$p = \frac{3\gamma}{\gamma + 1} ch^{-2} \left(\frac{\omega_r}{2} \sqrt{\frac{\beta_0 \rho_0}{\gamma \rho_0}} k \xi \right) = \frac{3\gamma}{\gamma + 1} ch^{-2} \left(\frac{k_0}{2} \xi \right),$$

$$k_0 = \frac{\sqrt{a_{10}^2 - a_0^2}}{a_{10} a_0} \omega, k, \quad \xi = x - Vt, \quad V = a_{10} \frac{\omega}{k} = \pm a_{10} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}. \quad (2.2)$$

Здесь и далее ξ – стационарная координата, связанная с фронтом волны ($\xi = 0$), V – скорость его распространения. Решение (2.2), иным путем полученное впервые Корпелом [1], описывает поведение уединенной волны (солитона) с амплитудой $3\gamma/(\gamma + 1)$. Очевидно, что скорость распространения солитона является дозвуковой, поскольку $V < a_{10}$, и для сверхкоротких волн ($k \rightarrow \infty$) ее величина стремится к значению скорости звука в чистой жидкости: $V \rightarrow a_{10}$.

Случай $u_3 = 1$. Формулы (2.1) сохраняют свою силу, а дисперсионное уравнение будет отличаться от предыдущего: $\omega^2 - k^2 - 1 = 0$. Тогда, в силу представления (1.4) и первых двух формул из (2.1), новым и вторым точным решением будет функция

$$p = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left[1 - \frac{3}{2} ch^{-2} \left(\frac{\omega_r}{2} \sqrt{\frac{\beta_0 \rho_0}{\gamma \rho_0}} k \xi \right) \right], \quad V = \pm a_{10} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}. \quad (2.3)$$

Решение (2.3) описывает распространение уединенной волны (солитона) с амплитудой $\frac{\gamma}{\gamma+1}$, перемецающейся со сверхзвуковой скоростью $V > a_{10}$, и при $k \rightarrow \infty$ вновь имеем $V \rightarrow a_{10}$.

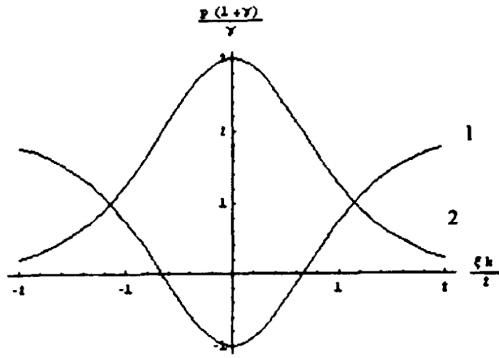


Рис. 1.

На рис. 1 в сопутствующей системе координат приведены профили солитонов, описываемых решениями (2.2) – кр. 2 и (2.3) – кр. 1.

3. Структуры волн (учет вязкости). Пусть $u_3 = 1$.

Подставляя (1.8) в формулы (1.5) и уравнение (1.6), будем иметь

$$u_1 = 6(\omega^2 - k^2) \exp[2(kx - \omega t)],$$

$$u_2 = -6 \left(\omega^2 - k^2 + \frac{\delta \omega}{5} \right) \exp(kx - \omega t), \quad (3.1)$$

$$\omega^2 + \delta \omega - k^2 - 1 = 0.$$

Подстановка формул (3.1) в уравнение (1.7) и последующее комбинирование с дисперсионным соотношением из (3.1) приводят к связям

$$\omega^2 - k^2 = \frac{1}{6}, \quad \omega = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{\delta}, \quad k = \pm \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{\delta} \sqrt{1 - \frac{6}{25} \delta^2}.$$

Согласно полученным связям и формулам (3.1) и в силу представления решения в виде (1.4), получим

$$u(x', t') = [1 + \exp(kx' - \omega t')]^{-2}. \quad (3.2)$$

Простой подстановкой проверяется, что функция (3.2), действительно, является точным решением уравнения (1.3). Переход к размерным координатам (1.2) позволяет записать его в виде

$$p = \frac{2\gamma}{\gamma+1} [1 + \exp(k_1 \xi)]^{-2}, \quad \xi = x - Vt, \quad (3.3)$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{\beta_0 \rho_0}{\gamma p_0}} \omega, k, \quad V = a_{10} \frac{\omega}{k} = \pm a_{10} \left(1 - \frac{6}{25} \delta^2 \right)^{-\frac{1}{2}},$$

где верхний и нижний знаки (\pm) отнесены к волнам, перемецающимся со сверхзвуковой скоростью $V > a_{10}$ соответственно вдоль положительного и отрицательного направлений оси x . Для первой из них вдали от фронта $\xi = 0$ из (3.3) следуют асимптотические значения

$$p(-\infty) = \frac{2\gamma}{\gamma+1}, \quad p(\infty) = 0, \quad (3.4)$$

определяющие равновесные однородные состояния смеси в областях позади ($\xi < 0$) и впереди ($\xi > 0$) фронта. Поскольку решение (3.3) непрерывно соединяет эти предельные состояния, следовательно, оно описывает структуру ударной волны.

Исследуем поведение решения (3.3) в области позади ($\xi < 0$) фронта волны. Полагая $p = p(-\infty) + z$, где z – малое возмущение, и проводя стандартную процедуру по выявлению явного вида функции $z(\xi)$, получим $z \sim \exp(5\xi/\delta)$, откуда при $\xi \rightarrow -\infty$ следует $z = 0$. Таким образом, в области $\xi < 0$ решение (3.3) устойчиво к малым возмущениям.

Случай $u_3 = 0$. Формулы (3.1) для u_1 и u_2 останутся без изменения, а дисперсионное соотношение примет вид $\omega^2 - k^2 + \delta\omega + 1 = 0$.

Для связей, соответствующих рассматриваемому случаю, будем иметь

$$\omega^2 - k^2 = -\frac{1}{6}, \quad \omega = -\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{\delta}, \quad k = \pm \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{\delta} \sqrt{1 + \frac{6}{25} \delta^2}.$$

Тогда решение уравнения (1.3), записанное через давление в размерных координатах (1.2), предстанет в виде функции

$$p = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left[1 - (1 + \exp k_2 \xi)^{-2} \right], \quad \xi = x - Vt, \quad (3.5)$$

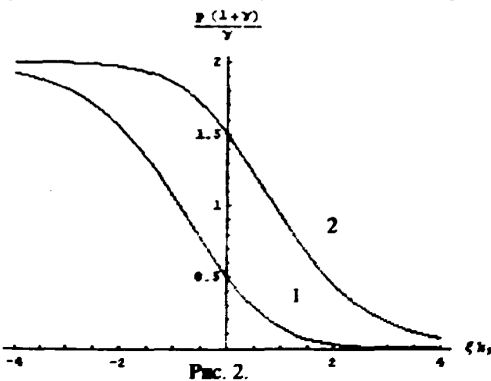
$$k_2 = \sqrt{\frac{\beta_0 \rho_0}{\gamma p_0}} \omega, k, \quad V = \pm a_{10} \left(1 + \frac{6}{25} \delta^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Решение (3.5), как и (3.3), описывает структуры ударных волн, которые, однако, распространяются с дозвуковой скоростью ($V < a_{10}$) вдоль положительного (нижний знак)

и отрицательного (верхний знак) направлений оси x .

На рис. 2 представлены структуры однонаправленных ударных волн, перемещающихся вдоль положительного направления оси X , описываемые решениями (3.3) – кр. 1 и (3.5) – кр. 2.

Заключение. Нелинейное уравнение Клейна–Гордона описывает эволюцию вы-



сокочастотных уединенных волн (солитонов) с разными амплитудами, перемещающихся не только с дозвуковой (ранее известное), но и со сверхзвуковой скоростями, ненамного отличающимися от скорости звука в чистой жидкости. Учет вязкости позволяет определить структуры ударных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корпел А., Бенерджи П.П. – ТИИЭР, 1984, т. 32, № 9, с. 6–30.
2. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990, 248 с.
3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред, ч. II. М.: Наука, 1987, 360 с.
4. Оганян Г.Г. – Изв. РАН, МЖГ, 1994, № 6, с. 75–83.
5. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. – J. Math. Phys., 1983, v. 24, №3, p. 522–536.
6. Кудряшов Н.Н. – ПММ, 1988, т. 52, № 3, с. 465–470.
7. Кудряшов Н.А., Сухарев М.Б. – ПММ, 2001, т. 65, № 5, с. 884–894.
8. Whitham G.V. Linear and nonlinear waves. New-York-London: Wiley Intersc. Publ. (Рус. перев.: Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977, 623 с.)

Շ. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ, Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ԿԼԵՅՆԻ-ԳՈՐԴՈՆԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՃՇԳՐԻՏ
ՄԱՍՆԱՎՈՐ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ
ՀԵՂՈՒԿԻ ԵՎ ԳԱԶԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրված է գազի պրայջակներով հեղուկի խառնուրդում տարածվող արագ ալիքի վարքը: Ալիքի նկարագրման համար ստացված է Կլեյնի-Գորդոնի ոչ գծային հավասարումը դիսիպատիվ գումարելիներով: Կառուցված են նրա մասնավոր ճշգրիտ լուծումները, որոնք նկարագրում են սոլիտոնների տեղափոխությունները (միացյալ ալիքներ) ինչպես մինչդայնային (մախկինում հայտնի), այնպես էլ գերձայնային արագություններով: Դիսիպացիայի հաշվառումը հանգեցնում է լուծումների, որոնք դիտարկվող խառնուրդում նկարագրում են հարվածային ալիքների կառուցվածքը: Ստացված անալիտիկ լուծումները որակապես ճիշտ են նկարագրում փորձնական ճանապարհով դիտարկված ալիքների տարածման պրոցեսը:

Sh. A. GRIGORYAN, S. M. MANUKYAN, G. G. OHANYAN

EXACT PARTICULAR SOLUTIONS OF NONLINEAR KLEIN-GORDON
EQUATION AND THEIR APPLICATION IN FLUID MECHANICS

Summary

The behavior of a rapid wave (the precursor) spreading in a liquid with gas bubbles has been studied. For its description, the nonlinear Klein-Gordon equation with dissipative components was modeled. Its exact partial solutions were constructed, describing the displacement of solitons (solitary waves), both at a subsonic speed (known earlier) and at a supersonic speed. Record of dissipation (viscosity) leads to solutions that describe the structures of shock waves in the examined mixture. The obtained analytic solutions correctly reflect the process of dissemination of waves observed in the experiment.