ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2004 Естественные науки

Механика

УДК 519.95

А. С. ЧЛИНГАРЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ НАВЕДЕНИЯ НА m-ВЫПУКЛЫЕ КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается устойчивость решения игровых задач наведения на m-выпуклые компактные множества, когда объекты подчиняются системам обыкновенных линейных нестационарных дифференциальных уравнений с постоянной и переменной динамикой. Доказывается, что решения устойчивы относительно малого возмущения параметров системы и относительно малого возмущения начальных значений.

§ 1. Пусть имеем управляемый объект, движение которого описывается системой линейных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами, определенными на $[t_0,\theta]$:

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u+C(t)v, \qquad (1.1)$$

где $A(t)$ – матрица размерности $(n\times n)$, x – n-мерный вектор-столбец, матрицы $B(t)-(n\times p)$, $C(t)-(n\times q)$; u,v – векторы управляющих воздействий, допустимые реализации которых предполагаются измеримыми и стеснены ограничениями $u\in P\subset R^p, v\in Q\subset R^q$, где P и Q – ограниченные и замкнутые множества [1]. Пусть заданы моменты времени $t_\alpha, \alpha=1,2,...,m$, удовлетворяющие условию $t_0\le t_1\le t_2\le ...\le t_m=\vartheta$, и заданы выпуклые, компактные множества $M_\alpha\subset R^{(n)}$, $\alpha=1,2,...,m$. Цель первого игрока решить задачу наведения на множества M_α, $\alpha=1,2,...,m$, в соответствующие моменты времени t_α, $\alpha=1,2,...,m$. Т.е. первый игрок должен выбрать такую стратегию $U\div u(t)$, чтобы в каждый момент времени t_α, $\alpha=1,2,...,m$, выполнялось условие $x[t_\alpha]\in M_\alpha$ при упорном сопротивлении второго игрока. Цель второго игрока помешать этому, т.е. выбрать такую стратегию $V\div v(t)$, чтобы хотя бы для одного t_α, $\alpha=1,2,...,m$, выполнялось условие $x[t_\alpha]\notin M_\alpha$, $\alpha=1,2,...,m$, при упорном сопротивлении первого игрока.

Исследуем устойчивость решения вышепоставленной игровой задачи относительно малого изменения параметров системы (1.1). Для этого одновременно с (1.1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x}^* = A^*(t)x^* + B^*(t)u + C^*(t)v, \tag{1.2}$$

где матрицы $A^*(t)$, $B^*(t)$, $C^*(t)$ мало отличаются от $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, т.е.

$$\begin{cases} \left| a^*_{js}(t) - a_{js}(t) \right| \le \Delta \\ \left| b^*_{js}(t) - b_{js}(t) \right| \le \Delta \quad \text{при } t \in [t_0, \vartheta], \\ \left| c^*_{js}(t) - c_{js}(t) \right| \le \Delta \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\Delta > 0$ – малая величина [2]. Рассматриваем устойчивость движений, порождаемых экстремальными стратегиями U_e или V_e, определяемыми из принципа максимума [1], по отношению к малым возмущениям $\Delta A = A^* - A,\ \Delta B = B^* - B,\ \Delta C = C^* - C$ параметров системы. Обозначим семейство движений $\{\ x[t]\ \}$ $(t_0 \le t \le \vartheta)$ системы (1.1), отвечающее исходной позиции $\{t_0, x_0\}$ при управлениях $u[t] \in P,\ \ v = v[t]$ $(v[t] \in Q)$, через $X[U, v; t_0, x_0]$.

Семейство движений $\{\ x^*[t]\ \}$ $(t_0 \le t \le \vartheta)$ системы (1.2) при той же исходной позиции $\{t_0, x_0\}$ и при тех же управлениях $u[t] \in P,\ \ v = v[t]$ $(v[t] \in Q)$ обозначим через $X^*[U, v; t_0, x_0]$.

Определение. Скажем, что стратегия U обеспечивает устойчивость движений $\{x[t]\}$ из $X[U, v; t_0, x_0]$ $(t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_m = \vartheta)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\Delta(\varepsilon) \succ 0$ (при $\varepsilon \to 0$, $\Delta \to 0$), такое, что для каждого α $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ всякое движение $\{\ x^*[t]\}$ $(t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_m = \vartheta)$ из семейства $X^*[U, v; t_0, x_0]$ будет находится в ε-окрестности семейства движений $X[U, v; t_0, x_0]$, как только будут выполнены неравенства (1.3). Иначе говоря, если стратегия U обеспечивает устойчивость движений $\{x[t]\}$ из $X[U, v; t_0, x_0]$, то при выполнении неравенств (1.3) для любого движения $\{\ x^*[t]\}$ из семейства $X^*[U, v; t_0, x_0]$ найдется такое движение $\{x[t]\}$ из $X[U, v; t_0, x_0]$, которое будет удовлетворять неравенству $\left\|\{\ x[t]\} - \{x^*[t]\ \}\right\| < \varepsilon$ для каждого $t \in [t_0, \vartheta]$. Аналогичным образом определяется устойчивость движений $\{x[t]\}$ из $X[u, V; t_0, x_0]$, порождаемых управлениями $u = u[t]$ $(u[t] \in P)$, $v[t] \in Q$.

Теорема 1.1. Допустимые стратегии U и V обеспечивают устойчивость движений $\{x[t]\}$ семейства X, порожденных соответственно управлениями $u[t]\in P$, $v=v[t]$ $(v[t]\in Q)$ или $u=u[t]$ $(u[t]\in P)$, $v[t]\in Q$.

Доказательство. Приведем доказательство методом от противного для движения $X[U,v;t_0,x_0]$. Пусть теорема неверна для какой-то стратегии U при исходной позиции $\{t_0,x_0\}$ и при реализации $v[t]$. Это означает, что среди всех $\alpha=1,2,...,m$ существует хотя бы одно α_*, такое, что выполняются условия (1.3), но при этом в семействе $X[u,V;t_0,x_0]$ существует хотя бы одно движение $\{x[t]\}$, для которого выполняется неравенство $\left\|\{x[t]\}-\{x^*[t]\}\right\|\geq\varepsilon$ на некотором множестве $E_{\alpha_*}\in[t_0,\vartheta)$ положительной меры.

Тогда соответственно разным возмущениям параметров системы можно построить последовательности матриц $A_s^*(t)$, $B_s^*(t)$, $C_s^*(t)$ $(s=1,2,...)$, таких, что равномерно по t будут выполнены соотношения $\lim\limits_{s\to\infty}A_s^*(t)=A(t)$, $\lim\limits_{s\to\infty}B_s^*(t)=B(t)$, $\lim\limits_{s\to\infty}C_s^*(t)=C(t)$ при $t_0\leq t\leq\vartheta$, но тем не менее каждое семейство X_s^* движений $\{x^*[t]\}^{(s)}$ не будет находиться в какой-то определенной ε-окрестности семейства $X[u,V;t_0,x_0]$, т.е. $\left\|\{x[t]\}-\{x^*[t]\}^{(s)}\right\|\geq\varepsilon$ на $E_{\alpha_*}\subset[t_0,\vartheta)$; $\mu(E_{\alpha_*})>0$.

Элементы последовательности $\{x^*[t]\}^s$ являются абсолютно непрерывными функциями. Тогда по лемме Кантора из этой последовательности функций можно выбрать подпоследовательность $\{x^*[t]\}^{(s_j)}$ $(j=1,2,...)$, которая при $t_0\leq t\leq\vartheta$ будет сходится к некоторой вектор-функции $\{x[t]\}^{(0)}$, причем каждое из движений $\{x^*[t]\}^{(s_j)}$ не будет лежать в ε-окрестности семейства X, т.е. $\left\|\{x[t]\}-\{x^*[t]\}^{s_j}\right\|\geq\varepsilon$ на E_{α_*}, $\mu(E_{\alpha_*})>0$.

Так как в нашем случае движения являются абсолютно непрерывными функциями, то компактность множества движений не нарушается [3]. Тогда, с одной стороны, вследствие компактности предел $\{x[t]\}^{(0)}$ построенной подпоследовательности принадлежит семейству $X^*[U,v;t_0,x_0]$, с другой стороны, т.к. $\lim\limits_{s\to\infty}A_s^*(t)=A(t)$, $\lim\limits_{s\to\infty}B_s^*(t)=B(t)$, $\lim\limits_{s\to\infty}C_s^*(t)=C(t)$

при $t_0 \le t \le \vartheta$, то предел есть элемент семейства $X[U,v;t_0,x_0]$. Таким образом, получаем противоречие, т.е. стратегия U при исходной позиции $\{t_0,x_0\}$ и реализации $v[t]$ при любом α $(\alpha=1,2,...,m)$ обеспечивает устойчивость движений $\{x[t]\}$ семейства $X[U,v;t_0,x_0]$. Для движения $X[u,V;t_0,x_0]$ доказательство аналогично.

В регулярном случае экстремальные стратегии U_e и V_e, определяемые из принципа максимума [1], являются допустимыми. Тогда по доказанной теореме они обеспечивают устойчивость движений $\{x[t]\}$, т.е., подставляя эти управляющие воздействия в систему (1.1), получаем в качестве решения абсолютно непрерывные кривые, которые в моменты времени t_α проходят через множества M_α.

§ 2. Пусть теперь движение управляемого объекта описывается следующей системой:

$$\dot{x}_k = A_k(t)x_k + B_k(t)u_k + C_k(t)v_k, \quad k=1,2,...,m, \tag{2.1}$$

где $A_i(t)$, $B_i(t)$, $C_i(t)$ – матрицы с непрерывными элементами при $t\in[t_0,\vartheta)$ и с размерностями, соответственно равными $(n\times n)$, $(n\times p_i)$ и $(n\times q_i)$; $u_i\in P_i, v_i\in Q_i$; множества $P_i\subset R^{p_i}$, $Q_i\subset R^{q_i}$ – заданные компакты, $i\in I$ $(I=1,2,...,m)$ [4].

Пусть заданы выпуклые, замкнутые и ограниченные множества M_i, $i\in I$, в пространстве $x\in R^n$ и моменты времени $t_0\le t_1\le ...\le t_m=\vartheta$.

Задача 2.1. Даны начальная позиция (t_0,x_0) и моменты времени t_i, $t\in[t_{k-1},t_k)$. Требуется найти экстремальные программные управления $u_j^0(t)$ и $v_j^0(t)$, которые удовлетворяют следующему условию:

$$\max_{\{v_j(\cdot)\}}\min_{\{u_j(\cdot)\}}\left[\sum_{j=1}^{k-1}\min_{p_j\in M_j(t_j)}\left\|x_j-p_j\right\|^2+\sum_{j=k}^{m}\min_{p_j\in M_j(t_j)}\left\|x(t_j,t_0,x_0,u_j(.),v_j(.))-p_j\right\|^2\right]^{1/2}=$$
$$=\varepsilon^{(0)}\left(t_0,x_0,x_1,...,x_{k-1},\{t_j\}\right),$$

где $t_0\in[t_{k-1},t_k)$, $k=1,...,m$, [4]. Здесь под $u_j(t)$ и $v_j(t)$ следует понимать любые интегрируемые по Лебегу функции, удовлетворяющие почти везде включениям $u_j(t)\in P_j$, $v_j(t)\in Q_j$ на промежутке $t\in[t_{j-1},t_j)$ $(j\in I)$; $x(t,t_0,x_0,u_j(.),v_j(.))$ – решение системы (2.1), которое состоит из абсолютно непрерывных кривых.

Для этой задачи в [4] выделяется регулярный случай и дается решение. Рассмотрим устойчивость решения этой задачи, одновременно с (2.1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x}_k^* = A_k^*(t)x_k^* + B_k^*(t)u_k + C_k^*(t)v_k, \qquad k = 1,2,...,m, \tag{2.2}$$

где матрицы $A_k^*(t)$, $B_k^*(t)$, $C_k^*(t)$ несколько отличаются от $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$, т.е.

$$\begin{cases} \left| \, a_{js}^{k*}(t) - a_{js}^k(t) \, \right| \le \Delta \\ \left| \, b_{js}^{k*}(t) - b_{js}^k(t) \, \right| \le \Delta \\ \left| \, c_{js}^{k*}(t) - c_{js}^k(t) \, \right| \le \Delta \end{cases} \text{при } t \in [t_0, \vartheta] \text{ и любом } k \in I, \tag{2.3}$$

где $\Delta > 0$ – малая величина.

Исследуем устойчивость движений $x[t] = x\left[t, t_0, x_0, U^{(0)}\right]$ по отношению к малым возмущениям $\Delta A_k = A_k^* - A_k$, $\Delta B_k = B_k^* - B_k$, $\Delta C_k = C_k^* - C_k$ параметров системы. Эти движения порождаются экстремальными стратегиями $U^{(0)} \div u^{(0)}(t)$, определяемыми из принципа максимума [4].

Обозначим семейство движений $\{\, x[t] \,\}$ $(t_0 \le t \le \vartheta)$ системы (2.1), отвечающее исходной позиции $\{t_0, x_0\}$ при управлениях $u_j(t) \in P_j$, $v_j = v_j(t)$ $\left(v_j(t) \in Q_j\right)$, через $X\left[U, v, t_0, x_0, x_1, ..., x_k, \{t_j\}\right]$.

Семейство движений $\{\, x^*[t] \,\}$ $(t_0 \le t \le \vartheta)$ системы (2.2) при той же исходной позиции $\{t_0, x_0\}$ и при тех же управлениях $u_j(t) \in P_j$, $v_j = v_j(t)$ $\left(v_j(t) \in Q_j\right)$ обозначим через $X^*\left[U, v; t_0, x_0, x_1, ..., x_k, \{t_j\}\right]$.

Определение. Скажем, что кусочно-программная стратегия $U \div u(t)$ обеспечивает устойчивость движений $\{x[t]\}$ из X $(t_0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_m = \vartheta)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\Delta(\varepsilon) > 0$ (при $\varepsilon \to 0$, $\Delta \to 0$), такое, что для каждого j $(j = 1,2,...,m)$ всякое движение $\{\, x^*[t]\}$ $(t_0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_m = \vartheta)$ из семейства $X^*\left[U, v; t_0, x_0, x_1, ..., x_k, \{t_j\}\right]$ будет находиться в ε-окрестности семейства движений $X\left[U, v, t_0, x_0, x_1, ..., x_k, \{t_j\}\right]$, как только будут выполнены неравенства (2.3).

Иначе говоря, если кусочно-программная стратегия U обеспечивает устойчивость движений $\{x[t]\}$ из X, то при выполнении неравенств (2.3) для любого движения $\{\, x^*[t]\}$ из семейства X^* найдется такое движение $\{x[t]\}$ из X, которое будет удовлетворять неравенству $\left\| \{\, x[t]\} - \{x^*[t] \,\} \right\| < \varepsilon$ для каждого $t \in [t_0, \vartheta]$. Верна следующая теорема.

Теорема 2.1. Допустимые стратегии U обеспечивают устойчивость движений $\{x[t]\}$ семейства $X\left[U,v,t_0,x_0,x_1,...,x_k,\{t_j\}\right]$, порожденных управлениями $u_j(t)\in P_j$, $v_j=v_j(t)$ $\left(v_j(t)\in Q_j\right)$.

Доказательство этой теоремы мы не приводим, т.к. на каждом этапе оно аналогично доказательству теоремы из предыдущего параграфа.

§ 3. Теперь исследуем устойчивость решения системы (1.1) относительно изменения начальных значений $\{t_0,x_0\}$. При этом под устойчивостью мы понимаем ее определение по Ляпунову [5].

Предположим, что имеет место регулярный случай игры. Возьмем начальные значения $x(t_0)=x_0$ и соответственно им единственным способом из принципа максимума [1] определим экстремальные стратегии $\left(u^0,v^0\right)$. Подставив их в (1.1), получим систему

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u^0+C(t)v^0, \tag{3.1}$$

правые части которой зависят только от (t,x). Тогда, по теореме Каратеодори, существует единственное абсолютно непрерывное решение системы (3.1). Обозначим это решение через $x\left(t;t_0,x_0,u^0,v^0\right)=x^0(t)$, $t\in(t_0,\vartheta)$ (оно соответствует начальным значениям $x(t_0)=x_0$). Причем это решение в зависимости от начальных условий меняется непрерывно. Покажем, что это решение будет устойчивым.

Из формулы (2.11) [1] следует, что функция $\varepsilon^{(0)}(t_0,x_0,\vartheta)$ непрерывно зависит от x_0, а по t_0 – везде непрерывна, кроме точек t_α $(\alpha=1,2,...,m)$, где она имеет разрывы только первого рода. Вследствие этого в точках t_α $(\alpha=1,2,...,m)$ решение $x^0(t)$ имеет изломы. Начальным значениям дадим приращение Δx_0, т.е. возьмем $x(t_0)=x_0+\Delta x_0$. Пусть $\left(u^0+\Delta u,v^0+\Delta v\right)$ – соответствующие им экстремальные стратегии. Подставив их в (1.1), получим систему

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)\left(u^0+\Delta u\right)+C(t)\left(v^0+\Delta v\right). \tag{3.2}$$

И пусть $x\left(t;t_0,x_0+\Delta x_0,u^0+\Delta u,v^0+\Delta v\right)=x^0(t)+\Delta x(t)$ $\left(t\in(a,\infty)\right)$ есть решение системы (3.2), соответствующее начальным значениям $x(t_0)=x_0+\Delta x_0$.

Предположим, что $\varepsilon^{(0)}(t_0,x_0+\Delta x_0,\vartheta)$ – гипотетическое рассогласование, соответствующее начальным значениям $x(t_0)=x_0+\Delta x_0$. Из-за непрерывности функции $\varepsilon^{(0)}(t_0,x_0,\vartheta)$ по x_0 следует, что при малом изменении начальных условий она также меняется на малую величину [2]. И т.к. в точках t_α $(\alpha=1,2,...,m)$ она имеет разрывы только первого рода, т.е. совершает скачки ограниченной величины, то в этих точках изменения функции $\varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \vartheta)$ будут малыми [1]. В данной задаче мы рассматриваем только конечное число целевых множеств и для каждого множества имеем малое изменение функции $\varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \vartheta)$, но т.к. сумма конечного числа малых величин дает опять малую величину, то в результате получается, что при малом изменении начальных условий функция $\varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \vartheta)$ на всем интервале (t_0, ϑ) тоже меняется мало. Т.е. получаем следующий вывод.

Теорема 3.1. В регулярном случае решение $x^0(t)$ системы (1.1), соответствующее экстремальным стратегиям, которые решают третью игровую задачу, устойчиво относительно малых изменений начальных значений.

Так как гипотетическое рассогласование $\varepsilon^{(0)}\left(t_0, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, \{t_j\}\right)$, определяемое из [4], обладает теми же свойствами, что и функция $\varepsilon^{(0)}(t_0, x_0, \vartheta)$ из [1], то решение задачи 2.1 удовлетворяет следующей теореме.

Теорема 3.2. В регулярном случае решение $x^0(t)$ системы (2.1), соответствующее экстремальным стратегиям, устойчиво относительно малых изменений начальных значений.

Кафедра теоретической механики

Поступила 23.10.2003

ЛИТЕРАТУРА

1. **Габриелян М.С.** – Ученые записки ЕГУ, 1976, № 1, с. 34–39.
2. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970, с. 157–163.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 572 с.
4. **Габриелян М.С.** – Межвуз. сб. научных трудов. Математика. Ер., ЕГУ, 1985, вып. 5, с. 124–134.
5. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967, с. 63–69.

Ա. Ս. ՉԼԻՆԳԱՐՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ m ՈՒՌՈՒՑԻԿ ԿՈՄՊԱԿՏ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻՆ ԲԵՐՄԱՆ ԽԱՂԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է ղեկավարվող օբյեկտի բերման խնդրի լուծման կայունությունը կոմպակտ ուռուցիկ բազմությունների վրա, երբ օբյեկտը ենթարկվում է հաստատուն և փոփոխական դինամիկայով սովորական գծային ոչ ստացիոնար դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգին: Ապացուցվում է, որ լուծումները կայուն են ըստ համակարգի պարամետրերի փոքր շեղումների և ըստ սկզբնական պայմանների փոքր շեղումների:

A.S. CHLINGARYAN

STABILITY OF THE SOLUTION OF GAME PROBLEMS ON GUIDANCE TO m CONVEX AND COMPACT SETS FOR LINEAR SYSTEMS

Summary

The stability of solution of game problems on guidance to convex and compact sets when objects follow the systems of ordinary linear nonstationary differential equations with constant and variable dynamics is considered. It is proved that solutions are stable with respect to small perturbation of system parameters and small perturbation of initial values.