Математика

УДК 519. 22

Н. Х. МЕСРОПЯН

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ ОТНОСИТЕЛЬНО КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА

В статье приводится критерий проверки гипотезы относительно корреляционной функции наблюдаемого стационарного гауссовского процесса $\xi(t), t\in[0,T]$, с нулевым средним.

1. Пусть наблюдается стационарный гауссовский процесс $\xi(t)$, $t\in[0,T]$, с нулевым средним и корреляционной функцией $B(t)$. Требуется построить модель, с помощью которой можно было бы осуществить проверку гипотезы H_0 о том, что корреляционная функция процесса $\xi(t)$ имеет вид

$$B(t)=1-ct^2+|t|^{2+\alpha}+o\left(|t|^{2+\alpha}\right),\quad t\to 0,\ 0<\alpha<2, \tag{1}$$

против гипотезы H_1:

$$B(t)=1-c|t|^{\alpha}+o\left(|t|^{\alpha}\right),\quad t\to 0,\ 0<\alpha<2. \tag{2}$$

Допустим, справедлива гипотеза H_0. Из (1) следует, что $B(t)$ дважды дифференцируема, при этом для корреляционной функции процесса $\xi'(t)$ имеет место соотношение $\Delta_h\Delta_{-h}B''(o)=c|h|^{\alpha}$, $0<\alpha<2$, где Δ_h – оператор взятия разности: $\Delta_h B(t)=B(t+h)-B(t)$. Тогда, по [1], существует эквивалентный гауссовский процесс $\tilde{\xi}'(t)$, для каждой траектории которого при достаточно малых h равномерно по t в каждом конечном интервале $\left|\Delta_h\tilde{\xi}'(t)\right|\le c|h|^{\alpha}\left|\ln|h|\right|^{1/2}$, где c – некоторая постоянная. Отсюда следует, что $\tilde{\xi}'(t)$ непрерывен. Поэтому случайная величина $V_N=h\sum_{k=0}^{N-1}\left[\dfrac{\xi(h(k+1))-\xi(kh)}{h}\right]^2$, где $h=\dfrac{T}{N}$, имеет такое же предельное распределение, что и $h\sum_{k=0}^{N-1}\left(\xi'(kh)\right)^2$. Поскольку $\xi'(t)$

непрерывен, $h\sum_{k=0}^{N-1}\left(\xi'(kh)\right)^2$ сходится к $\int_0^T\left(\xi'(t)\right)^2 dt$ почти всюду. Таким образом, V_N в пределе имеет то же распределение, что и $\int_0^T\left(\xi'(t)\right)^2 dt$.

Если ввести статистику $W_{1N}=\sum_{k=0}^{N-1}\left[\xi\left(h(k+1)\right)-\xi(kh)\right]^2=h\cdot V_N$, $h=\frac{T}{N}$, то в условиях гипотезы H_0 получаем, что статистика $W=\frac{W_{1N}}{h\sigma^2}$, где $\sigma^2=E\int_0^T\left(\xi'(t)\right)^2 dt$, асимптотически ($N\to\infty$) эквивалентна $\int_0^T\left(\xi'(t)\right)^2 dt$.

Пусть теперь справедлива гипотеза H_1, т.е. $B(t)=1-c|t|^\alpha+o\left(\left|t^\alpha\right|\right)$. Тогда имеет место следующее предельное соотношение в смысле сходимости в среднем [1]:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\left(\Delta_h\xi(kh)\right)^2}{\Delta_h\Delta_{-h}B(o)}=1. \tag{3}$$

Учитывая, что в условии (2)

$$\Delta_h\Delta_{-h}B(o)=O\left(|h|^\alpha\right), \tag{4}$$

имеем $\frac{W_{1N}}{h}=\frac{W_{1N}}{N|h|^\alpha}\cdot\frac{N|h|^\alpha}{h}\approx\frac{\sum_{k=0}^{N-1}\left(\Delta_h\xi(kh)\right)^2}{N\Delta_h\Delta_{-h}B(o)}\cdot\frac{T|h|^\alpha}{h^2}$, где $\approx$ означает порядок функции.

В силу (3), (4) и условия $0\langle\alpha\langle 2$ будем иметь $\frac{W_{1N}}{h}\approx h^{\alpha-2}\xrightarrow[h\to 0]{}\infty$.

Таким образом, проверку гипотезы относительно корреляционной функции рассматриваемого процесса можно осуществить с помощью следующего критерия: если статистика $W=\frac{W_{1N}}{h\sigma^2}\xrightarrow[h\to 0]{}\infty$ почти всюду, то справедлива гипотеза H_1, если же $W=\frac{W_{1N}}{h\sigma^2}$ асимптотически эквивалентна $\int_0^T\left(\xi'(t)\right)^2 dt$, то справедлива гипотеза H_0. Заметим, что если через P_0 и P_1 обозначить вероятностные P-меры, соответствующие корреляционным функциям процесса при H_0 и H_1, то из сказанного будет следовать, что меры P_0 и P_1 взаимно сингулярны.

2. Опишем модель проверки гипотезы. Обозначим корреляционную функцию процесса $\xi'(t)$ через $R(t,s)$ – ядро вполне непрерывного положи-

тельного оператора [2]. Тогда, по теореме Мерсера, она допускает разложение $R(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k(t)\bar{\varphi}_k(s)$, где λ_k – собственные значения, а $\varphi_k(t)$ – ортонормированная система собственных функций:

$$\int_0^T\varphi_i(t)\bar{\varphi}_j(t)dt=\delta_{ij},\quad \int_0^T R(t,s)\varphi_j(s)ds=\lambda_j\varphi_j(t),\quad \sum|\lambda_j|^2\langle\infty.$$

Разложим $\xi'(t)$ в ряд по ортонормированной системе $\varphi_k(t)$: $\xi'(t)=$ $=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\varphi_k(t)$, где $x_k=\int_0^T\xi'(t)\varphi_k(t)dt$ – гауссовские случайные величины, для которых $Ex_k=0$, $Ex_i\bar{x}_j=\lambda_j\delta_{ij}$. Тогда,

$$\int_0^T(\xi'(t))^2dt=\sum_{i,j}x_i\bar{x}_j\cdot\int_0^t\varphi_i(t)\bar{\varphi}_j(t)dt=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2.$$

Нормируя случайные величины x_k, получим независимые стандартные $\eta_k=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}x_k$, $k=1,2,\ldots$, и тогда $\int_0^E(\xi'(t))^2dt=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|\eta_i|^2$.

Таким образом, задача сводится к нахождению такого C, чтобы для статистики $W=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\eta_k^2$ выполнялось условие $P\{W\rangle C\}\langle 1-\gamma$, где $\gamma\rangle 0$ – заданный уровень значимости.

Обозначим $X_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\eta_k^2$, $Y_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k\eta_k^2$. Для $\varepsilon\rangle 0$ имеем

$$P\{X_n+Y_n\le C\}\ge P\{X_n\le C-\varepsilon,Y_n\le\varepsilon\}.$$

Тогда $P\{X_n+Y_n\rangle C\}=1-P\{X_n+Y_n\le C\}\le 1-P\{X_n\le C-\varepsilon,Y_n\le\varepsilon\}=$

$$=1-P\{X_n\le C-\varepsilon\}\cdot P\{Y_n\le\varepsilon\}=$$

$$=\left[1-P\{X_n\le C-\varepsilon\}\right]+P\{X_n\le C-\varepsilon\}\cdot\left[1-P\{Y_n\le\varepsilon\}\right]=$$

$$=P\{X_n\ge C-\varepsilon\}+P\{X_n\le C-\varepsilon\}\cdot P\{Y_n\rangle\varepsilon\}\le P\{X_n\rangle C-\varepsilon\}+P\{Y_n\rangle\varepsilon\},$$

т.е. $P\{X_n+Y_n\rangle C\}\le P\{X_n\rangle C-\varepsilon\}+P\{Y_n\rangle\varepsilon\}$.

Заметим, что по неравенству Чебышева $P\{Y_n\rangle\varepsilon\}\le\frac{1}{\varepsilon}EY_n=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k$.

Пусть γ – заданный уровень значимости и δ – его погрешность, $C=C_\gamma$ – такая постоянная, что $P\{X_n+Y_n\rangle C\}=1-\gamma$.

Обозначим через $\tilde{C}=\tilde{C}_\gamma$ такую постоянную, для которой $P\{X_n\rangle\tilde{C}\}=1-\gamma$. Из неравенства $1-\gamma=P\{X_n\rangle\tilde{C}\}\le P\{X_n+Y_n\rangle\tilde{C}\}$ следует, что $\tilde{C}_\gamma\langle C_\gamma$.

Оценим разность

$$P\left\{X_n+Y_n>\tilde{C}\right\}-P\left\{X_n+Y_n>C\right\}=P\left\{X_n+Y_n>\tilde{C}\right\}-(1-\gamma)=$$

$$=P\left\{X_n+Y_n>\tilde{C}\right\}-P\left\{X_n>\tilde{C}\right\}\le P\left\{X_n>\tilde{C}-\varepsilon\right\}+P\left\{Y_n>\varepsilon\right\}-P\left\{X_n>\tilde{C}\right\}.$$

Таким образом,

$$0<P\left\{X_n+Y_n>\tilde{C}\right\}-P\left\{X_n+Y_n>C\right\}\le P\left\{X_n>\tilde{C}-\varepsilon\right\}+P\left\{Y_n>\varepsilon\right\}-P\left\{X_n>\tilde{C}\right\}\le\delta.$$

По заданному δ найдем такое ε, чтобы $P\left\{X_n>\tilde{C}-\varepsilon\right\}-P\left\{X_n>\tilde{C}\right\}=\frac{\delta}{2}$. Если при этом окажется, что $\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda_j\le\frac{\delta}{2}$, то $\tilde{C}$ – искомое. Если $\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda_j\ge\frac{\delta}{2}$, то нужно положить $n+1$ вместо n и проделать этот процесс до тех пор, пока $\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda_j\le\frac{\delta}{2}$.

Найденная таким образом постоянная $\tilde{C}\in\left[C_{\gamma+\delta},C_{\gamma-\delta}\right]$.

Кафедра теории вероятностей
и математической статистики

Поступило 04.12.2003

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А.** Гауссовские стационарные процессы. М.: Наука, 1970.
2. **Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.

Ն. Խ. ՄԵՍՐՈՊՅԱՆ

ԳԱՈՒՍՅԱՆ ՊՐՈՑԵՍԻ ԿՈՌԵԼՅԱՑԻՈՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՎԱՐԿԱԾԻ ՍՏՈՒԳՈՒՄԸ

Ամփոփում

Հոդվածում բերվում է զրոյական միջինով $\xi(t), t\in[0,T]$, ստացիոնար գաուսյան պրոցեսի կոռելյացիոն ֆունկցիայի վերաբերյալ վարկածի ստուգման հայտանիշը:

N. Ch. MESROPYAN

VERIFYING HYPOTHESIS ON THE CORRELATIVE FUNCTION OF GAUSSIAN PROCESS

Summary

The paper presents a criterion of verifying hypothesis on the correlative function observed by stationary Gaussian process with zero average value.