ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2005 Естественные науки

*Математика*

УДК 519.25

А. О. АПИНЯН

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В настоящей работе рассмотрена дискретная модель оптимизации борьбы с загрязнением окружающей среды. Обобщена задача работы [1] на случай, когда загрязнение включено в функцию полезности. В рамках метода динамической оптимизации предложен алгоритм случайного поиска оптимального решения.

**$1^0$. Модель.** В связи с масштабами загрязнения окружающей среды изучение математических моделей оптимизации стратегии борьбы с этим явлением актуально (см., напр., [1, 2]). В таких моделях в момент $t\in[t_0,\ T]$ продукцию-капитал распределяют между накоплением капитала $K(t)$, потреблением $c(t)$ и борьбой с загрязнением $P(t)$. И на основе функции полезности $u(c,P)$ максимизируют общее благосостояние

$$W(c,\ P)=\int_{t_0}^{T}u(c(t),\ P(t))e^{-rt}dt, \qquad (1)$$

где $r>0$ (субъективная скорость дисконтирования) есть константа при «гладкости» введенных величин.

В отличие от работы [1] скорость роста загрязнения будем описывать уравнением

$$\dot P(t)\ =\ (1-\beta(t)d)f(L_1)-bP(t),\quad t\in[t_0,\ T]\ , \qquad (2)$$

где сохранены внешние переменные $b$ – скорость очистки загрязнителя и $d$ – уменьшение загрязнения при уменьшении потребления на единицу (см. [1]). Точка над функцией означает ее производную по времени. Здесь потребление $c(t)$ в момент $t\in[t_0,\ T]$ есть производственная функция

$$c=F(L(t)-L_1(t),z(L_1(t)))\overset{def}{=}f(L_1(t)),$$

где трудовые ресурсы $L(t)$ фиксированы, а ее часть $L_1(t)$ используется в производстве загрязнителей с производственной функцией $z(L_1(t))$. Функция $\beta(t)$ представляет собой долю капитала, выделенную в момент $t$ на борьбу с загрязнением, и является переменной *управления*.

Задав начальные условия $P(t_0)=P_0$, $L_1(t_0)=L_{1,0}$, $\beta(t_0)=0$, и условия

$$\beta(t)\le M,\quad \bar{u}\le u(c,P), \tag{3}$$

приходим к модели динамической оптимизации (1)–(3), обобщающей *модель* работы [1].

**2⁰. Дискретизация.** Выберем позицию $(\bar{L}_1,\bar{c},\bar{P})$, где $\bar{L}_1,\bar{c},\bar{P}$ – значения используемых в производстве загрязнителей трудовых ресурсов, потребления и выделенного на борьбу с загрязнением капитала в момент $T$ соответственно. С целью приближенного решения задачи (1)–(3) мы собираемся достичь этой позиции.

Определим разбиение $[t_0,\ T]$ на узлы

$$\Delta\ :\ t_0<t_1<\ldots<t_{i-1}<t_i<\ldots t_n\ =\ T \tag{4}$$

и осуществим дискретизацию задачи (1)–(3):

$$P(t_i)=\frac{1}{1+b\Delta t_i}\{[1-\beta(t_i)d]f(L_1(t_i))]\Delta t_i+P(t_{i-1})\},\ \textit{где} \tag{5}$$

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1},$$

$$\beta(t_i)=\beta(t_{i-1})+\Delta\beta(t_i), \tag{6}$$

$$\beta(t_i)\le M, \tag{7}$$

$$u(c,\ P)=\bar{u}. \tag{8}$$

Вводим *критерий* оптимальности.

Траекторию $(L_1(t),\ c(t),\ P(t))$ на $[t_0,\ T]$ назовем *оптимальной*, если

$$D((L_1(t),c(t),P(t));(\bar{L},\ \bar{c},\ \bar{P}))=\min_{(L_1'(t),\,c'(t),\,P'(t))}D((L_1'(t),c'(t),P'(t));(\bar{L},\bar{c},\bar{P})), \tag{9}$$

где $D$ – евклидово расстояние.

В настоящей работе решается оптимизационная задача (4)–(9).

**3⁰. Метод решения.** Приведем несколько определений.

Пусть $B$ – некоторое компактное множество в $R=(-\infty,+\infty)$, называемое множеством *управляющих* параметров задачи (1)–(3).

Измеримая на $[t_0,\ T]$ функция $\beta$ называется *допустимым* управлением, если

$$\beta(t)\in B\ \text{ при каждом }\ t\in[t_0,T]. \tag{10}$$

Правило, которое вектору $(L_1(t),\ c(t),\ P(t))$ в момент $t$ ставит в соответствие допустимое управление, называют *стратегией*.

Стратегия $\beta(.)$ *допустима*, если решение системы (2)–(3) единственно.

По разбиению (4) фиксируем $a_i=(L_1(t_i),c(t_i),P(t_i))$, $i=0,1,\ldots,n-1$, и для вектор-функции $(L_1(t),c(t),P(t))$ на $[t_0,T]$ имеем дело со стратегиями ($\beta(.)$, $a$), где $a=(a_0,\ a_1,\ldots,a_{n-1})$.

Идея *динамической оптимизации* заключается в том, что, выбирая допустимые управления на $[t_i,t_{i+1}]$ с начальным условием $a_i$ и «склеивая» их, строим допустимую стратегию ($\beta(.)$, $a$) задачи (1)–(3) на $[t_0,T]$.

Идея реализуется при определенных условиях применимости динамической оптимизации методом случайного поиска (см. [3]). А именно, выбираются последовательность $\{\lambda_i\}_{i=0,1,\dots,k}$ случайных чисел, длина шага поиска $q$, и проверяются следующие условия $A_i$:

$$D(a_{i+1}, \bar{a}) \le D(a_i, \bar{a}), \quad \text{где} \quad \bar{a} = (\bar{L}_1, \bar{c}, \bar{P}). \tag{11}$$

**4$^0$. Алгоритм решения.** Положим

$$\Delta\beta(t_i) = \begin{cases} \lambda_{i-1}q & \textit{при условии } A_i, \\ -\Delta\beta(t_{i-1}) + \lambda_{i-1}q & \textit{в противном случае.} \end{cases} \tag{12}$$

Из (12) и (6) найдем $\beta(t_i)$, а из (9) – $L_1(t)$. Далее, из (8), т.к. $c = f(L_1(t))$, вычисляются $c(t_i)$ и $L(t_i)$. Тогда из (5) находим $P(t_i)$. Если условия $A_i$ и (6) выполнены, то $\beta(t_i)$ определено. В противном случае процедура повторяется.

Из $\beta(t_i) = \sum\limits_{k=0}^{i} \Delta\beta(t_k)$ при условии $A_k$, $k = \overline{1,i}$, имеем $\beta(t_i) = q\sum\limits_{k=1}^{i} \lambda_{k-1}$.

Поэтому ограничения $\beta(t_i) \le M$ влекут допустимость управления $\beta(.)$, если $q \le \dfrac{M}{\sum\limits_{k=1}^{i} \lambda_{k-1}}$, $i = \overline{1,n}$. Согласно [3], по алгоритму случайного поиска мы получаем последовательность значений

$$\{L_1(t_i),\ c(t_i),\ P(t_i),\ f(L_{1,i}),\ \beta(t_i)\}. \tag{13}$$

Пусть $g$ – одна из функций $L_1$, $c$, $P$, $f$, $\beta$.

Используя эрмитовы сплайны третьей степени $\tilde{g}$ (11)–(12) из [3] в качестве сплайн-аппроксимации оптимального решения $(c(t),\ P(t))$ задачи (1)–(3), как и в [1], получаем приближенное решение.

**5$^0$. Результат.** Введем следующее

*Условие B.* Пусть $\beta_i > 0$, $i = 1,2,3$, и

$$\left\|u(c,P) - u(c,\tilde{P})\right\| \le B_1\left\|P - \tilde{P}\right\|, \left\|u(c,\tilde{P}) - u(\tilde{c},\tilde{P})\right\| \le B_2\left\|c - \tilde{c}\right\|,$$

$$\left\|f(L_1) - f(\tilde{L}_1)\right\| \le B_3\left\|L_1 - \tilde{L}_1\right\|,$$

где $\left(c(t),\ L_1(t),\ P(t)\right)$ – оптимальное решение задачи (1)–(3), $\left(\tilde{c}(t),\ \tilde{L}_1(t),\ \tilde{P}(t)\right)$ – ее сплайн-аппроксимация, а $\|.\|$ – знак евклидовой нормы.

Определим разбиение отрезка $[0,\ L]$:

$$0 = L^0 < L^1 < \dots < L^j < \dots < L^m = L, \quad \textit{где} \quad L^j = L^{j-1} + \Delta L^j, j = \overline{1,m}.$$

Обозначим

$$\varepsilon = \max_{0\le i<n}\left(e^{r\Delta t_i} - 1\right), \quad \omega_i(g) = \max_{t',t''\in[t_i,t_{i+1}]} \left|g(t') - g(t'')\right|, \quad i = \overline{0,n-1},$$

$$\bar{\omega}_i = \max\left\{\omega_i\left(\dot{P}\right),\ \omega_i\left(\dot{L}_1\right),\ \omega_i\left(f_{L_1}\right)\right\}, \qquad \bar{\omega} = \max_{0\le i<n} \bar{\omega}_i,$$

$$Q = \max\left\{B_1,\ B_2,\ B_3,\ \bar{h},\ \bar{h}_L\right\}, \quad \textit{где} \quad \bar{h} = \max_{i=\overline{0,n}} \Delta t_i, \quad \bar{h}_L = \max_{j=\overline{0,m}} \Delta L^j,$$

$$B = \frac{9Q}{8r}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-rt_{i+1}}.$$

*Теорема*. Пусть $\beta(t), L_1(t), P(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[t_0,T]$, $f(L_1)$ непрерывно дифференцируемо на $[0,L]$, выполнено условие B, $(c,P)$ – оптимальное решение задачи (1)–(3), $\left(\tilde{c},\tilde{P}\right)$ – ее сплайн-аппроксимация. Тогда $\left\|W(c,P) - W\left(\tilde{c},\ \tilde{P}\right)\right\| < \varepsilon\cdot\omega\cdot B.$

Теорема доказывается аналогично основному результату работы [1] с использованием теоремы 2.5 из [3].

*Кафедра математического моделирования в экономике*

*Поступила 14.11.2004*


ЛИТЕРАТУРА

1. **Апинян А.О.** – Ученые записки ЕГУ, 2004, №2, с. 27–32.
2. **Килер Э., Спен М., Зенхаузер Р.** Оптимальный контроль над загрязнением окружающей среды. Математическая экономика (ред. Б.С. Митягин). М.: Мир, 1974, с. 46–63.
3. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошенко В.Л.** Сплайн функции. М.: Наука, 1980.


Ա. Հ. ԱՓԻՆՅԱՆ

## ԴԻՆԱՄԻԿ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ


### Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է շրջակա միջավայրի աղտոտվածության դեմ օպտիմալ պայքարի խնդրի ուսումնասիրությանը այն դեպքի համար, երբ աղտոտվածության պաշարը մտնում է օգտակարության ֆունկցիայի մեջ: Առաջարկվում է պատահական որոնման մեթոդի վրա հիմնված լուծման ալգորիթմը:


A. H. APINIAN

## ON ONE PROBLEM OF THE DYNAMIC OPTIMIZATION


### Summary

The present paper is devoted to the study of optimal control of pollution. It's assumed that the variable of stock of pollution is included into the utility function. The algorithm of the evaluation of optimal solution is given. The algorithm is based on the method of random search.