ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2005 Естественные науки

Математика

УДК 518.519

А.А. ДАНИЕЛЯН

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ВРЕМЕН ОЖИДАНИЯ МОДЕЛИ $GI|G|1|\infty$

Рассматриваются стационарные функции распределения W и W^* времен ожидания модели $GI|G|1|\infty$ при дисциплине *FIFO*, являющиеся пределами по времени актуального и виртуального времен ожидания. Установлено следующее экстремальное свойство. Для всех $x\in(0,+\infty)$ справедливы строгие неравенства $W(x)>W^*(x)>\hat{W}(x)$ в случае непуассоновского входящего потока, где $\hat{W}$ – стационарная функция распределения времен ожидания в случае пуассоновского входящего потока.

1⁰. Рассматривается следующая модель $GI|G|1|\infty$ очередей. В одноканальную систему обслуживания с ожиданием в моменты $\{t_n\}$, где $0=t_0\le t_1\le t_2...$, поступают одиночные вызовы, пронумерованные в порядке поступления числами 1, 2, 3,... Пусть $u_n=t_n-t_{n-1}$, $n\ge 1$, и v_n – время обслуживания n-го вызова. Последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ независимы и образуют последовательности независимых одинаково распределенных (НОР) случайных величин (СВ) с функциями распределения (ФР) A и B соответственно.

Предположения.

1. $A(+0)=0$, $B(+0)=0$. Условие $A(+0)=0$ влечет $P(t_0<t_1<t_2<...)=1$, где P – знак вероятности. Условие $B(+0)=0$ означает, что вероятность "мгновенного" обслуживания равна нулю.

2. $0<\alpha_1=Mu_1<+\infty$, $0<\beta_1=Mv_1<+\infty$, где M – знак математического ожидания. Тогда *загрузка* $\rho_1=(\beta_1/\alpha_1)\in R^+=(0,+\infty)$.

3. Случай $P(u_1=\alpha_1)=P(v_1=\beta_1)=1$ исключен из рассмотрения.

4. A и B – неарифметические ФР.

Характеристики. $w(t)$, $t\ge 0$, – виртуальное время ожидания в момент t. w_n, $n\ge 1$, – время ожидания n-го вызова.

Известно [1], что для $x \in R^+$ при дисциплине *FIFO* существуют пределы $W^*(x) = \lim_{t \to +\infty} P(w(t) < x)$, $W(x) = \lim_{n \to +\infty} P(w_n < x)$, которые при $\rho_1 < 1$ являются собственными ФР, называемыми стационарными ФР времен ожидания. При этом, вообще говоря, они не совпадают и связаны формулой Такача [1]

$$W^*(x) = 1 - \rho_1 + \rho_1 P(w + \hat{v} < x), \quad x \in R^+, \tag{1}$$

где w и $\hat{v}$ – независимые СВ с ФР W, и

$$\hat{B}(x) = \frac{1}{\beta_1} \int_0^x (1 - B(u)) du. \tag{2}$$

В настоящей работе уточняется следующий известный факт [1].

Теорема 1. В модели $GI|G|1|\infty$ при дисциплине FIFO и $\rho_1 < 1$ имеем $W \equiv W^*$ тогда и только тогда, когда

$$A(x) = 1 - \exp(-(1/\alpha_1)x), \quad x \in R^+. \tag{3}$$

Уточнение формулируется следующим образом.

Теорема 2. В модели $GI|G|1|\infty$ при дисциплине FIFO и $\rho_1 < 1$ одновременно для всех $x \in R^+$

$$\text{либо} \quad W(x) > W^*(x) > \hat{W}(x), \tag{4}$$

$$\text{либо} \quad W(x) = W^*(x) = \hat{W}(x), \tag{5}$$

$$\text{где} \quad \hat{W}(x) = (1 - \rho_1) \sum_{k \ge 0} \rho_1^k \hat{B}^{k*}(x), \quad x \in R^+, \tag{6}$$

$\hat{B}^{k*}$ – *k-кратная свертка* $\hat{B}$, $k \ge 2$, $\hat{B}^{0*} \equiv 1$, $\hat{B}^{1*} \equiv \hat{B}$.

Теорема 1 является следствием теоремы 2, поскольку формула (6), известная как формула Коэна, в модели $M|G|1|\infty$ представляет собой стационарную ФР времен ожидания.

С другой стороны, теорема 2 характеризует экстремальное свойство стационарных ФР времен ожидания в модели $GI|G|1|\infty$ в классе ФР A последовательности $\{u_n\}$, удовлетворяющих предположениям 1–4.

Доказательство теоремы 2 основано на формуле Такача (1) и на трех следующих вспомогательных леммах.

2⁰. Основные неравенства. Справедлива следующая

Лемма 1. В модели $GI|G|1|\infty$ при дисциплине FIFO и $\rho_1 < 1$ для $x \in R^+$ справедливы неравенства

$$W(x) \ge W^*(x) \ge \hat{W}(x). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $N(t), t \ge 0$, – число поступивших за $[0, t)$ в модель вызовов, $M(t) = N(t) + 1$. Тогда из известных равенств для времен ожидания

$$w_{n+1} = \max(0, w_n + v_n - u_{n+1}), \; n \ge 1, \; w(t) = \max\left(0, \; w_{N(t)} + v_{N(t)} - \left(t - t_{N(t)}\right)\right), \; t \ge 0,$$

на событии $\{N(t)>0\}$ выводим оценку

$$w(t)\ge w_{M(t)}. \tag{8}$$

Из усиленного закона больших чисел для $\{N(t):t\ge 0\}$ [2] следует

$$P\left\{\lim_{t\to+\infty} N(t)=+\infty\right\}=1.$$

Поэтому из-за неубывания последовательности $\{P(w_n<x)\}$ при фиксированном $x\in R^+$ из (8) выводим

$$W^*(x)=\lim_{t\to+\infty}P(w(t)<x)\le\lim_{t\to+\infty}P(w_{M(t)}<x)=\lim_{n\to+\infty}P(w_n<x)=W(x).$$

Из первого неравенства (7) следует неравенство

$$P(w+\hat v<x)\ge P\left(w^*+\hat v<x\right),\quad x\in R^+, \tag{9}$$

где СВ w и $\hat v$, w^* и $\hat v$ независимы, а w и w^* имеют ФР W и W^* соответственно.

Далее, из (1), (9) и первого неравенства (7) при $x\in R^+$ и $\rho_1<1$ находим

$$W(x)\ge 1-\rho_1+\rho_1 P(w+\hat v<x). \tag{10}$$

Аналогично при $x\in R^+$ и $\rho_1<1$ имеем

$$W^*(x)\ge 1-\rho_1+\rho_1 P\left(w^*+\hat v<x\right). \tag{11}$$

Неравенства (10), (11) допускают обобщение. Именно, при $x\in R^+$, $\rho_1<1$ и целом $n\ge 1$

$$W(x)\ge(1-\rho_1)\sum_{k=0}^{n-1}\rho_1^k\hat B^{k*}(x)+\rho_1^n P\left(w+\sum_{i=1}^{n}\hat v_i<x\right) \tag{12}$$

((12) справедливо при замене W и w на W^* и w^* соответственно). Здесь $\{\hat v_n\}$ – последовательность НОР СВ с ФР $\hat B$, а w, w^* не зависят от $\{\hat v_n\}$.

Неравенство (12) и его аналог сохраняются при $n\to+\infty$, что влечет за собой (7).

3^0. Первое уточнение. Справедлива следующая

Лемма 2. Если в модели $GI|G|1|\infty$ при дисциплине FIFO и $\rho_1<1$ неравенство $W^*(x)>\hat W(x)$ выполнено при некотором $\hat x\in R^+$, то оно сохраняется и при $x\in[\hat x,+\infty)$.

Доказательство. ФР $\hat B^{n*}$, $n\ge 1$, абсолютно непрерывна, а ее плотность $g_n>0$ на $[0,n\beta_1)$. Действительно,

$$g_n(x)=\iint\limits_{D_n(x)}\cdots\int\prod_{k=1}^{n}(1-B(x_k))dx_k,$$

где $D_n(x)=\left\{(x_1,\dots,x_n):x_k\ge 0,\ k=\overline{1,n},\ \sum x_k=x\right\}$.

Из (1) и (6) вытекает существование плотности у W^* и $\hat W$. Поэтому найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $W^*(x) > \hat{W}(x)$ при $x \in [\hat{x}, \hat{x}+\varepsilon)$. Покажем, что это неравенство верно и для $x \in [\hat{x}+\varepsilon, +\infty)$. Из аналога (12) для W^*, выбрав целые $m \ge n \ge 1$ из условия $(n-1)\beta_1 < \hat{x} < \hat{x}+\varepsilon \le m\beta_1$ при $x \in [\hat{x}+\varepsilon, +\infty)$, получаем

$$W^*(x) \ge (1-\rho_1)\sum_{k=0}^{m-1} \rho_1^k \hat{B}^{k*}(x) + \rho_1^m \left(\int_0^{\hat{x}} + \int_{\hat{x}}^{\hat{x}+\varepsilon} + \int_{\hat{x}+\varepsilon}^{+\infty} \right) W^*(y) g_m(x-y)dy >$$

$$> (1-\rho_1)\sum_{k=0}^{m-1} \rho_1^k \hat{B}^{k*}(x) + \rho_1^m \int_0^x \hat{W}(y) g_m(x-y)dy = \qquad (13)$$

$$= (1-\rho_1)\sum_{k=0}^{m-1} \rho_1^k \hat{B}^{k*}(x) + \rho_1^m \hat{B}^{m*}(x) + \hat{W}(x) = \hat{W}(x).$$

В (13) приняты во внимание (6), (7) и строгое неравенство $W^*(y) > \hat{W}(y)$ при $y \in [\hat{x}, \hat{x}+\varepsilon)$.

4^0. Второе уточнение. Лемма 2 обосновывает с учетом неравенства [3]

$$p_0 = W(+0) \ge W^*(+0) = 1-\rho_1$$

(равенство имеет место тогда и только тогда, когда выполнено (3)) следующее равенство:

$$0 \le \underline{x} \overset{def}{=} \min\{x > 0 : W^*(x) > \hat{W}(x)\} = \max\{x \ge 0 : W^*(x) = \hat{W}(x)\} \le +\infty. \qquad (14)$$

При этом, по аксиоме непрерывности, $W^*(\underline{x}) = \hat{W}(\underline{x})$.

Введенное число $\underline{x}$ используется для следующего уточнения леммы 1.

Лемма 3. В модели $GI|G|1|\infty$ при дисциплине FIFO и $\rho_1 < 1$ неравенства (4) справедливы при $x \in (\underline{x}, +\infty)$, а равенства (5) – при $x \in (0, \underline{x})$. При этом, если $\underline{x} \in R^+$, то в (5) $x \in (0, \underline{x})$.

Доказательство. Установим равенство $W(x) = W^*(x)$ при $x \in (0, \underline{x})$. Выберем целое $n \ge 1$ из условия $(n-1)\beta_1 \le \underline{x} < n\beta_1$. Тогда

$$W^*(x) = 1-\rho_1 + \rho_1 W^*(x) * \hat{B}(x), \quad x \in (0, \underline{x}).$$

Сравнивая это равенство с (1), заключаем:

$$W(x) * \hat{B}(x) = W^*(x) * \hat{B}(x), \quad x \in (0, \underline{x}),$$

или

$$\left(W(x) - W^*(x)\right) * \hat{B}^{n*}(x) = \int_0^x (W(x-y) - W^*(x-y)) g_n(y)dy = 0. \qquad (15)$$

Утверждение следует из первого неравенства (7), из $g_n > 0$ на $[0, n\beta_1)$ и из (15). Теперь из (14) следует (5) при $x \in (0, \underline{x})$.

Установим неравенство (4) при $x \in (\underline{x}, +\infty)$. Для $x \in (\underline{x}, +\infty)$ из (1) имеем

$$W(x) - W^*(x) = W(x) - (1-\rho_1) - \rho_1 W(x) * \hat{B}(x) = \rho_1 W(x) * \left(1-\hat{B}(x)\right)(1-\rho_1)\left(W(x)-1\right).$$

Отсюда из неравенств

$$W(x) > W^*(x), \quad W(x) * \left(1 - \hat{B}(x)\right) \geq \hat{W}(x) * \left(1 - \hat{B}(x)\right)$$

получаем

$$W(x) - W^*(x) > \rho_1 \hat{W}(x) * \left(1 - \hat{B}(x)\right) + (1 - \rho_1)\left(\hat{W}(x) - 1\right) = \hat{W}(x) - (1 - \rho_1) - \rho_1 \hat{W}(x) * \hat{B}(x). \tag{16}$$

Подставляя в правую часть (16) выражение для $\hat{W}$ из (6), выводим лемму 3.

5^0. Доказательство теоремы 2. Допустим в (14) $\underline{x} \in R^+$. Устремляя в (5) $x \downarrow 0$, где $x \in (0, \underline{x})$ (см. лемму 3), получаем $p_0 = W(+0) = W^*(+0) = 1 - \rho_1$, что выполняется только в случае (3). Но тогда $W(x) = W^*(x) = \hat{W}(x)$ при всех $x \geq 0$. Следовательно, $\underline{x} = +\infty$. Полученное противоречие доказывает, что в лемме 3 либо $\underline{x} = 0$, либо $\underline{x} = +\infty$.

При таком уточнении леммы 3 приходим к теореме 2.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Поступила 05.03.2005

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.** Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982.
2. **Боровков А.А.** Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
3. **Штойян Д.** Качественные свойства и оценки стохастических моделей. М.: Мир, 1979.

Ա. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

ՍՊԱՍՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿՆԵՐԻ ԷՔՍՏՐԵՄԱԼ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ $GI|G|1|\infty$ ՄՈԴԵԼՈՒՄ

Ամփոփում

$GI|G|1|\infty$ մոդելում *FIFO* հերթակարգի դեպքում դիտարկվում են սպասման ժամանակների ստացիոնար բաշխման ֆունկցիաները՝ W-ն և W^*-ն, որոնք համապատասխանաբար ակտուալ և վիրտուալ սպասման ժամանակների սահմաններն են ըստ ժամանակի:

Նրանց համար ոչ պուասոնյան մտնող հոսքի դեպքում ապացուցված է հետևյալ էքստրեմալ հատկությունը :

Բոլոր $x \in (0, +\infty)$ արժեքների համար $W(x) > W^*(x) > \hat{W}(x)$, որտեղ $\hat{W}$-ն սպասման ժամանակների ստացիոնար բաշխման ֆունկցիան է պուասոնյան մտնող հոսքի պայմաններում:

A. A. DANIELYAN

EXTREMAL PROPERTY OF WAITING TIMES IN $GI|G|1|\infty$ MODEL

Summary

In the present paper stationary distribution functions W and W^* of waiting times, which are limits for actual and virtual waiting times across the time axis, in the $GI|G|1|\infty$ model under *FIFO* discipline are examined.

The following extremal property is proved. For all $x \in (0, +\infty)$ in the case of non-Poissonian entering stream of demands the strict inequalities $W(x) > W^*(x) > \hat{W}(x)$ are valid, where $\hat{W}$ is the waiting times' stationary distribution function in the case of the Poissonian entering stream.