ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2005 Естественные науки

*Математика*

УДК 519.21

Э. А. ДАНИЕЛЯН, В. К. САГАТЕЛЯН

# ОДНА МИНИМАКСНАЯ ЗАДАЧА НА КЛАССЕ СТАРЕЮЩИХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрено правило предупредительных замен элементов функционирующей системы через случайное время. Функция распределения отказов системы неизвестна, однако она принадлежит к определенному классу функций с известными начальными моментами. Задача сводится к игре с моментными ограничениями. Найдено оптимальное правило предупредительных замен.

**§1. Введение.** Построение оптимального правила предупредительных замен элементов устройств – задача теории надежности. Часто отказ элемента приводит к экономическим потерям. Тогда целесообразна замена элемента до того, как он слишком «состарится». Замены обычно применяются к элементам со стареющими функциями распределения (ФР) времени «жизни». Элемент заменяется либо после отказа, либо через период времени $T$ после установки. Пусть $T$ – случайная величина, что естественно, например, для систем, которые работают в течение определенного цикла без перерыва. Опишем правила замены в таких системах [1].

С правилом замен связано несколько процессов восстановления (ПВ). Вначале пусть элементы заменяются по мере их отказа. Тогда промежутки времени между заменами $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины (СВ) с ФР $F$, т.е. образуют ПВ. Через $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим ПВ с ФР $G$, который представляет собой последовательность СВ – длин интервалов между успешными предупредительными заменами, не связанными с аварийными отказами в системе.

Определим третий процесс интервалов $\{Z_k=\min\{X_k,Y_k\}\}_{k=1}^{\infty}$ между заменами, где последние вызваны либо аварийными отказами, либо предупредительными заменами в соответствии с процедурой по ФР $G$.

Определим еще один процесс $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$, положив

$$V_k = \begin{cases} 1, & Z_k = X_k, \ k\text{-ое восстановление происходит из - за аварийного отказа}, \\ 0 & \text{в прочих случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$E[V_1] = P[X_1 \le Y_1] = \int_0^{\infty} F(x)dG(x) \qquad (1)$$

есть вероятность отказа, происходящего раньше предупредительной замены, где $E$ – знак математического ожидания.

Итак, нахождение оптимального правила предупредительных замен свелось к нахождению ФР $G$, минимизирующей функционал (1).

К этому же функционалу приводит следующая задача. Пусть $G$ – ФР безотказной работы некоторой системы, например пакета компьютерных программ. Здесь $G(x)$ – вероятность того, что за время $x$ система безотказна. Через $F(x)$ обозначим ФР времени выполнения некоторой задачи этого класса, т.е вероятность выполнения задачи за время меньше $x$. Рассмотрим функционал

$$P_0 = \int_0^{\infty} G(x)dF(x) = 1 - \int_0^{\infty} F(x)dG(x). \qquad (2)$$

Фактически $P_0$ есть вероятность выполнения задачи. Нахождение ФР $G$, максимизирующей $P_0$, равносильно минимизации функционала (1).

Ниже рассмотрена задача минимизации функционала (1) при определенных условиях.

Обычно явный вид ФР $F$ и $G$ неизвестен. Известны лишь классы, к которым они принадлежат, и несколько начальных моментов. При этом в теории надежности естественно предположение: $F$ – стареющая ФР, т.е. $F(x) = 1 - e^{-f(x)}$, $x \ge 0$, где $f(x)$ – выпуклая функция.

**§2. Вспомогательная лемма.** Удобным аппаратом решения экстремальных задач с моментными ограничениями служит метод альтернации [2].

*Лемма. Пусть* $(1, x, x^2, F(x))$ *– чебышевская система функций на* $[a,b]$. *Тогда минимум функционала* $\int_a^b F(x)dG(x)$ *на классе стареющих ФР* $G$ *при известных первых двух моментах –* $\int_a^b x dG(x) = c_1$ *и* $\int_a^b x^2 dG(x) = c_2$ *– достигается на функции*

$$G_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < a, \\ 1 - \exp[-\lambda_1(x - x_1)] & \text{при } x_1 \le x < b, \\ 1 & \text{при } b \le x < +\infty. \end{cases} \qquad (3)$$

*Здесь в точке* $b$ *ФР* $G_0$ *имеет скачок* $\lambda_2$. *При этом* $x_1, \lambda_1, \lambda_2$ *находятся из равенств:*

$$e^{-\lambda_1(b - x_1)} = \lambda_2, \quad \frac{1}{\lambda_1}(1 - \lambda_2) + x_1 = c_1, \quad \frac{2}{\lambda_1}\left(b\lambda_2 + x_1 + \frac{1}{\lambda_1}(1 - \lambda_2)\right) + x_1^2 = c_2. \qquad (4)$$

*Доказательство*. Применим метод альтернации (см. [2], дополнение, §1.2), т.е. для стареющих ФР при заданных двух начальных моментах минимизирующую ФР ищем в множестве $I_{3}$- вида (3).

Рассмотрим уравнение $\int_a^b x dG(x) = c_1$. Пусть $G_0$ имеет скачок в точке $b$, тогда

$$c_1 = \int_a^b x dG_0(x) = \int_{x_1}^b x d(1 - e^{-\lambda_1(x-x_1)}) + b\lambda_2 = b(1 - e^{-\lambda_1(b-x_1)}) - b + x_1 - \frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1(b-x_1)} + \frac{1}{\lambda_1} + b\lambda_2,$$

отсюда $c_1 = \frac{1}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1(b-x_1)}) + x_1$. Так как функция $G_0$ имеет скачок $\lambda_2$ в точке $b$, то $\lambda_2 + G_0(b-0) = 1 \Rightarrow \lambda_2 = e^{-\lambda_1(b-x_1)}$. Из уравнения $\int_a^b x^2 dG(x) = c_2$ имеем

$$c_2 = \int_{x_1}^b x^2 d(1 - e^{-\lambda_1(x-x_1)}) + b^2\lambda_2 = b^2(1-\lambda_2) - b^2 + x_1^2 + b^2\lambda_2 + 2\int_{x_1}^b x e^{-\lambda_1(x-x_1)} dx .$$

Учитывая вид $\lambda_2$, получим систему уравнений (4).

**§3. Результат.** Во многих задачах теории надежности ФР $F$ неизвестна. Однако известны ее несколько первых моментов и класс функций, к которому она принадлежит. Как отмечалось в [1], в таком случае естественна минимаксная оценка функционала (1). При этом ФР $F$ и $G$ считаем сконцентрированными на $[0,1]$ без ограничения общности. Однако минимаксная оценка имеет смысл только в случае равенства двойных экстремумов:

$$\max_G \min_F \int_0^1 F(x) dG(x) = \min_F \max_G \int_0^1 F(x) dG(x).$$

Например, минимаксная оценка на множестве всех ФР, сконцентрированных на $[0,1]$, не имеет смысла.

Действительно, с одной стороны, $\min_F \max_G \int_0^1 F(x) dG(x) = \min_F \max_{x\in[0,1]} F(x) = \min_F F(1) = 1$. С другой стороны, $\max_G \min_F \int_0^1 F(x) dG(x) = 1 - \min_G \max_F \int_0^1 F(x) dG(x) = 1 - \min_G \max_{x\in[0,1]} G(x) = 1 - \min_G G(1) = 1 - 1 = 0$. Как известно, вопросы существования и равенства двойных экстремумов рассматриваются в теории антагонистических игр. Поэтому минимаксная оценка может интерпретироваться в терминах игры с Природой [3].

Рассмотрим антагонистическую игру Конструктора с Природой на единичном квадрате, в которой Природа выбирает ФР $F$, максимизирующую вероятность отказа системы, а Конструктор – ФР $G$, минимизирующую эту вероятность.

Правило предупредительной замены элементов эффективно в случае, когда ФР отказов и правил замены – стареющие ФР [1]. Обозначим через

$V_{c_1,c_2}$ множество стареющих ФР с фиксированными моментами – математическим ожиданием $c_1$ и вторым моментом $c_2$. При этом ФР из $V_{c_1,c_2}$ являются чебышевским продолжением системы $(1,x,x^2)$.

*Теорема. В игре* $\Gamma=\left\langle V_{c_1,c_2}, V_{c_1',c_2'}, H(F,G)=\int_0^1 F(x)dG(x)\right\rangle$ *существует ситуация равновесия. Оптимальные стратегии игроков* $F_0$ *и* $G_0$ *имеют вид*

$$G_0(x)=\begin{cases}0, & x<x_1,\\ 1-e^{-\lambda_1(x-x_1)}, & x_1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1;\end{cases}\qquad F_0(x)=\begin{cases}0, & x<x_1',\\ 1-e^{-\lambda_1'(x-x_1')}, & x_1'\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}\tag{5}$$

*Доказательство.* Как известно [3], существование ситуации равновесия эквивалентно равенству двойных экстремумов:

$$\max_{F\in V_1}\min_{G\in V_2}\int_0^1 F(x)dG(x)=\min_{G\in V_2}\max_{F\in V_1}\int_0^1 F(x)dG(x),\ \text{ где }\ V_1=V_{c_1,c_2}, V_2=V_{c_1',c_2'}.\tag{6}$$

При этом оптимальные стратегии игроков являются точками соответствующих внешних экстремумов. Рассмотрим $\max\limits_{F\in V_1}\min\limits_{G\in V_2}\int_0^1 F(x)dG(x)$. Согласно лемме, $\min\limits_{G\in V_2}\int_0^1 F(x)dG(x)=\int_0^1 F(x)dG_0(x)$, где $G_0$ не зависит от $F$ и имеет вид (5). Следовательно, справедливо (6). Интегрируя по частям , получим

$$\max_{F\in V_1}\int_0^1 F(x)dG_0(x)=\max_{F\in V_1}\Big(1-\int_0^1 G_0(x)dF(x)\Big)=1-\min_{F\in V_1}\int_{x_1}^1 G_0(x)dF(x).$$

Легко видеть, что $G_0'''>0$ в области интегрирования, тогда $(1,x,x^2G_0(x))$ – чебышевская система функций.Поэтому применима лемма. Следовательно, минимум функционала $\int_0^1 G_0(x)dF(x)$ достигается на ФР $F_0$, где $F_0$ имеет такой же вид, что и $G_0$, однако с другими параметрами (см. (5)).

Рассмотрим теперь $\min\limits_{G\in V_2}\max\limits_{F\in V_1}\int_0^1 F(x)dG(x)$. Дословно повторяя предыдущие рассуждения, получим: $\min\limits_{G\in V_2}\max\limits_{F\in V_1}\int_0^1 F(x)dG(x)=\int_0^1 G_0(x)dF_0(x)$. Таким образом, $\max\limits_{F\in V_1}\min\limits_{G\in V_2}\int_0^1 F(x)dG(x)=\min\limits_{G\in V_2}\max\limits_{F\in V_1}\int_0^1 F(x)dG(x)=\int_0^1 F_0(x)dG_0(x)$, т.е в игре $\Gamma$ существует ситуация равновесия и оптимальные стратегии игроков имеют вид (5). Теорема доказана.

*Кафедра теории вероятностей и математической статистики*

*Поступила 05.04.2005*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Барлоу Р., Прошан Ф.** Математическая теория надежности. М.: Советское радио, 1969.
2. **Danielian E.** Optimization of Functionals on Classes of Distributions with Moments' Constraints. Part 2. Nonlinear Case. Finland: TICSP, Series # 18, 2003.
3. **Оуэн Г.** Теория игр. М.: Мир, 1971.



Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Վ. Կ. ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ


## ՄԻ ՄԻՆԻՄԱՔՍԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ԾԵՐԱՑՈՂ ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐՈՒՄ


### Ամփոփում

Ուսումնասիրված է գործող համակարգի տարրերի նախազգուշական փոխանակումների կարգը պատահական ժամանակից հետո: Համակարգի խափանման բաշխման ֆունկցիան հայտնի չէ, սակայն այն պատկանում է ֆունկցիաների որոշակի դասին՝ հայտնի սկզբնական մոմենտներով: Խնդիրը հանգեցվում է ֆիքսված մոմենտներով խաղին Բնության հետ: Գտնված է նախազգուշական փոխանակումների օպտիմալ կարգը:



E. A. DANIELIAN, V. K. SAGHATELYAN


## ON ONE MINIMAX PROBLEM ON THE CLASS OF DISTRIBUTION FUNCTIONS INCREASING HAZARD RATE


### Summary

Policy of preventive replacement of functioning system's elements at random moments is considered. It is assumed that distribution function of system's failures is unknown. However, it belongs to the certain class of functions first moments of which are known. The problem is reduced to the game with moments' constraints. As a result, the optimal policy of preventive replacements is found.