

Математика

УДК 512.57

С. С. ДАВИДОВ

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БИНАРНЫХ АБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР

В работе изучается строение бинарных абелевых алгебр путем сведения их к известным алгебраическим образованиям – моноидам. Найдены условия, при которых бинарная абелевая алгебра имеет линейное представление, т.е. существует коммутативный моноид, через операцию и эндоморфизмы которого выражается каждая операция абелевой алгебры.

Абелевы алгебры изучались разными авторами (Сад, Стейн, Тойода, Брак, Медоч, Белоусов, Курош, Смит, Романовска, Кепка, Ежек, Мовсисян и др.) [1–5] под различными названиями: энтропийная, медиальная, бикоммутативная, бисимметричная алгебры. Абелевы алгебры связаны с понятием энтропии в теории информации [5] и находят приложение в кибернетике, экономике, физике и биологии.

Бинарная алгебра (Q, Σ) имеет линейное представление, если существуют коммутативный моноид $Q(+, 0)$ и системы его эндоморфизмов $\{f_x | X \in \Sigma\}$, $\{g_x | X \in \Sigma\}$ такие, что каждая операция $X \in \Sigma$ может быть представлена в виде $X(x, y) = f_x(x) + g_x(y) + e_x$ для всех $x, y \in Q$, причем $f_x f_y = f_y f_x$, $g_x g_y = g_y g_x$, $f_x g_y = g_y f_x$, $e_x \in Q$ для всех $X, Y \in \Sigma$. Линейное представление алгебры (Q, Σ) будем обозначать через $Q(+, 0, f_x, g_x, e_x)$. Линейное представление называется выпуклым, если $e_x = 0$ для всех $X \in \Sigma$.

Бинарная алгебра (Q, Σ) называется абелевой, если она удовлетворяет сверхтождеству абелевости $X(Y(x, y), Y(u, v)) = Y(X(x, u), X(y, v))$.

Для $A \in \Sigma$ и $a \in Q$ обозначим через $L_{A,a}$ ($R_{A,a}$) левую (правую) трансляции алгебры (Q, Σ) , т.е. отображения $L_{A,a} : x \rightarrow A(a, x)$ ($R_{A,a} : x \rightarrow A(a, x)$).

Предложение. Пусть (Q, Σ) – абелевая алгебра, удовлетворяющая котождеству $X(b, a) = Y(b, a)$. Кроме того, существуют $A \in \Sigma$ и $c, d \in Q$ такие, что $a = A(a, c)$, $b = A(b, c)$ и трансляции $R_{A,a}, L_{A,a}$ – биекции. Тогда

существует линейное представление $Q(+, 0, f_x, g_x, e_x)$, удовлетворяющее свойствам:

- 1) e_x – обратимый элемент $Q(+)$ для любого $X \in \Sigma$;
- 2) $0 = A(b, a)$;
- 3) $x + y = A(R_{A,a}^{-1}(x), L_{A,b}^{-1}(y))$ для всех $x, y \in Q$.

Доказательство. Положим $x + y = A(R_{A,a}^{-1}(x), L_{A,b}^{-1}(y))$, $0 = A(b, a)$.

Тогда

$$\begin{aligned} x + 0 &= x + A(b, a) = A(R_{A,a}^{-1}(x), L_{A,b}^{-1}(A(b, a))) = \\ &= A(R_{A,a}^{-1}(x), L_{A,b}^{-1}L_{A,b}(a)) = A(R_{A,a}^{-1}(x), a) = R_{A,a}R_{A,a}^{-1}(x) = x. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $0 + x = x$. Далее, пусть

$$r = A(x, L_{A,b}^{-1}(A(R_{A,a}^{-1}(y), z))), \quad s = A(R_{A,a}^{-1}(A(x, L_{A,b}^{-1}(y))), z).$$

Существуют элементы $t, u \in Q$, удовлетворяющие равенствам $A(b, u) = b$ и $A(b, t) = d$. Имеем

$$A(r, a) = A(r, A(a, c)) = A(A(x, a), A(L_{A,b}^{-1}(A(R_{A,a}^{-1}(y), z)), c)),$$

$$A(s, a) = A(s, A(a, c)) = A(A(x, L_{A,b}^{-1}(y)), A(z, c)) = A(A(x, z), A(L_{A,b}^{-1}(y), c)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A(b, A(r, a)) &= A(A(A(b, t), A(b, u)), A(r, a)) = \\ &= A(A(A(b, t), A(x, a)), A(A(b, u), A(L_{A,b}^{-1}(A(R_{A,a}^{-1}(y), z)), c)))) = \end{aligned}$$

$$= A(A(A(b, t), A(x, a)), A(A(R_{A,a}^{-1}(y), z), A(u, c))) =$$

$$= A(A(A(b, R_{A,a}^{-1}(y)), A(t, z)), A(A(x, a), A(u, c))) =$$

$$= A(A(A(b, R_{A,a}^{-1}(y)), A(x, a)), A(A(t, z), A(u, c))) =$$

$$= A(A(A(b, x), y), A(A(t, z), A(u, c))).$$

$$A(b, A(s, a)) = A(A(A(b, t), A(b, u)), A(s, a)) =$$

$$= A(A(A(b, t), A(x, z)), A(A(b, u), A(L_{A,b}^{-1}(y), c))) =$$

$$= A(A(A(b, x), A(t, z)), A(y, A(u, c))) = A(A(A(b, x), y), A(A(t, z), A(u, c))).$$

Поэтому $A(b, A(s, a)) = A(b, A(r, a))$, и поскольку трансляции $R_{A,a}, L_{A,b}$

инъективны, то $r = s$. Подставляя $x = R_{A,a}^{-1}(u_1), y = u_2, z = L_{A,b}^{-1}(u_3)$ в равенство $r = s$, получим $u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3$.

Из равенств

$$\begin{aligned} & A\left(A\left(R_{A,a}^{-1}\left(A(b,x)\right), L_{A,b}^{-1}\left(A(b,y)\right)\right), a\right) = \\ & = A\left(A\left(R_{A,a}^{-1}\left(A(b,x)\right), y\right), A(a,c)\right) = A\left(A(b,x), A(y,c)\right) = \\ & = A\left(A(b,y), A(x,c)\right) = A\left(A\left(R_{A,a}^{-1}\left(A(b,y)\right), x\right), A(a,c)\right) = \\ & = A\left(A\left(R_{A,a}^{-1}\left(A(b,y)\right), L_{A,b}^{-1}\left(A(b,x)\right)\right), a\right) \end{aligned}$$

с учетом сюръективности трансляций $R_{A,a}, L_{A,b}$ следует коммутативность $Q(+)$. Таким образом, $Q(+, 0)$ будет коммутативным моноидом.

Из сверхтождества абелевости имеем равенство

$$X(A(u, a), A(b, v)) = A(X(u, b), X(a, v))$$

или

$$X(R_{A,a}(u), L_{A,b}(v)) = A(R_{X,a}(u), L_{X,a}(v)).$$

Подставляя в него $u = R_{A,a}^{-1}(x), v = L_{A,b}^{-1}(y)$, получаем

$$X(x, y) = R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x) + L_{A,b}L_{X,a}L_{A,b}^{-1}(x). \quad (1)$$

Положим для каждого $X \in \Sigma$

$$i_X = A(b, X(a, a)), \quad j_X = A(X(b, b), a)$$

и покажем, что они обратимы в $Q(+)$. Существуют элементы $p, q \in Q$ такие, что $A(p, a) = b$ и $A(q, a) = a$. Поэтому

$$\begin{aligned} & A(X(p, q), a) + A(b, X(a, a)) = R_{A,a}X(p, q) + L_{A,b}X(a, a) = \\ & = A(X(p, q), X(a, a)) = X(A(p, a), A(q, a)) = X(b, a) = A(b, a) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично существуют элементы $u, v \in Q$ такие, что $A(b, u) = b, A(b, v) = a$ и $A(X(b, b), a) + A(b, X(u, v)) = 0$.

Введем обозначение для каждого $X \in \Sigma$:

$$f_X(x) = R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x) - j_X. \quad (2)$$

Покажем, что f_X — эндоморфизм полугруппы $Q(+, 0)$.

$$\begin{aligned} & R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x+y) + i_X = R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x+y) + L_{A,b}X(a, a) = \\ & = A(R_{X,b}R_{A,a}^{-1}A(R_{A,a}^{-1}(x), L_{A,b}^{-1}(y)), X(a, a)) = A(X(R_{A,a}^{-1}A(R_{A,a}^{-1}(x), L_{A,b}^{-1}(y)), b), X(a, a)) = \\ & = X\left(A\left(R_{A,a}^{-1}A\left(R_{A,a}^{-1}(x), L_{A,b}^{-1}(y)\right), a\right), A(b, a)\right) = X\left(A\left(R_{A,a}^{-1}(x), L_{A,b}^{-1}(y)\right), A(b, a)\right) = \end{aligned}$$

$$= A\left(X\left(R_{A,a}^{-1}(x), b\right), X\left(L_{A,b}^{-1}(y), a\right)\right) = R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x) + L_{A,b}R_{X,a}L_{A,b}^{-1}(y).$$

Таким образом,

$$R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x+y) + i_X = R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x) + L_{A,b}R_{X,a}L_{A,b}^{-1}(y). \quad (3)$$

Возьмем в равенстве (3) $x=0 = A(b,a)$, получим

$$R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(y) + i_X = R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}A(b,a) + L_{A,b}R_{X,a}L_{A,b}^{-1}(y)$$

или

$$L_{A,b}R_{X,a}L_{A,b}^{-1}(y) = R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}A(b,a) + L_{A,b}R_{X,a}L_{A,b}^{-1}(y). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), будем иметь

$$R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x+y) = R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x) + R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(y) - j_X. \quad (5)$$

Теперь, с учетом (5) имеем

$$\begin{aligned} f_X(x+y) &= R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x+y) - j_X = R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x) + \\ &+ R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(y) - j_X - j_X = f_X(x) + f_X(y); \\ f_X(0) &= f_X A(b,a) = R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}R_{A,a}(b) - j_X = \\ &= R_{A,a}R_{X,b}(b) - j_X = A(X(b,b), a) - j_X = j_X - j_X = 0. \end{aligned}$$

Аналогично существуют обратимые элементы $k_X = A(b, X(a,a))$ полугруппы $Q(+)$ такие, что отображения

$$g_X(x) = L_{A,b}L_{X,a}L_{A,b}^{-1}(x) - k_X \quad (6)$$

будут эндоморфизмами моноида $Q(+, 0)$.

Положим $e_X = j_X + k_X$, тогда e_X будет обратимым элементом для всех $X \in \Sigma$, и из формул (1), (2), (6) получим

$$X(x, y) = f_X(x) + g_X(y) + e_X \quad (7)$$

для всех $X \in \Sigma$ и всех $x, y \in Q$.

Покажем, что для всех $X, Y \in \Sigma$ выполняется равенство

$$X(e_Y, e_Y) = Y(e_X, e_X). \quad (8)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} e_X = j_X + k_X &= A(X(b,b), a) + A(b, X(a,a)) = R_{A,a}X(b,b) + L_{A,b}X(a,a) = \\ &= A(X(b,b), X(a,a)) = X(A(b,a), A(b,a)) = X(0, 0), \end{aligned}$$

поэтому

$$X(e_Y, e_Y) = X(Y(0,0), Y(0,0)) = Y(X(0,0), X(0,0)) = Y(e_X, e_X).$$

Кроме того, $X(e_Y, e_Y)$ будут обратимыми элементами в полугруппе $Q(+)$ для всех $X, Y \in \Sigma$. В самом деле, если t_Y — обратный элемент для e_Y , то

$$\begin{aligned} X(e_Y, e_Y) + X(t_Y, t_Y) - e_X - e_X &= f_X e_Y + g_X e_Y + e_X + f_X t_Y + \\ &+ g_X t_Y + e_X - e_X - e_X = f_X(e_Y + t_Y) + g_X(e_Y + t_Y) = f_X(0) + g_X(0) = 0. \end{aligned}$$

Теперь, используя гомоморфность f_x, g_x , равенство (8) и обратимость $X(e_r, e_r)$, будем иметь

$$\begin{aligned} X(Y(0, x), Y(0, 0)) &= Y(X(0, 0), X(x, 0)), \\ f_x(f_r 0 + g_r x + e_r) + g_x(f_r 0 + g_r 0 + e_r) + e_x &= f_r(f_x 0 + g_x 0 + e_x) + \\ &+ g_r(f_x x + g_x 0 + e_x) + e_r, \\ f_x f_r 0 + f_x g_r x + f_x e_r + g_x f_r 0 + g_x g_r 0 + g_x e_r + e_x &= \\ = f_r f_x 0 + f_r g_x 0 + f_r e_x + g_r f_x x + g_r g_x 0 + g_r e_x + e_r, \\ f_x g_r x + f_x e_r + g_x e_r + e_x &= g_r f_x x + f_r e_x + g_r e_x + e_r, \\ f_x g_r x + X(e_r, e_r) &= g_r f_x x + Y(e_r, e_r), \end{aligned}$$

следовательно, $f_x g_r = g_r f_x$.

Аналогично проверяются равенства $f_x f_r = f_r f_x, g_x g_r = g_r g_x$ для всех $X, Y \in \Sigma$. Предложение доказано.

Теорема 1. Пусть (Q, Σ) – абелева алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) существует линейное представление $Q(+, 0, f_x, g_x, e)$ такое, что f_A, g_A – автоморфизмы (Q, Σ) для некоторого $A \in \Sigma$ и e – обратимый элемент $Q(+)$;

2) существуют элемент $a \in Q$ и операция $A \in \Sigma$ такие, что алгебра (Q, Σ) удовлетворяет тождеству $X(a, a) = Y(a, a)$ и трансляции $R_{A, a}, L_{A, a}$ – биекции.

Доказательство. Предположим, что алгебра (Q, Σ) имеет линейное представление. Положим $a = 0$, тогда в (Q, Σ) выполняется тождество $X(a, a) = Y(a, a)$, т.к. $X(0, 0) = f_x 0 + g_x 0 + e = f_r 0 + g_r 0 + e = Y(0, 0)$.

Далее, т.к. f_A и g_A – биекции, то таковыми будут и трансляции $R_{A, 0}, L_{A, 0}$. Обратно, полагая в предложении $a = b$, получим линейное представление $Q(+, 0, f_x, g_x, e_x)$ алгебры (Q, Σ) , для которого f_A и g_A будут биекциями. Остается показать, что для любых $X, Y \in \Sigma$ будет иметь место равенство $e_x = e_r$. Действительно,

$$\begin{aligned} e_x = j_x + k_x &= A(X(a, a), a) + A(a, X(a, a)) = R_{A, a} X(a, a) + L_{A, a} X(a, a) = \\ &= R_{A, a} Y(a, a) + L_{A, a} Y(a, a) = A(Y(a, a), a) + A(a, Y(a, a)) = j_y + k_y = e_r. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть (Q, Σ) – абелева алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) существует выпуклое линейное представление $Q(+, 0, f_A, g_A)$ такое, что f_A, g_A – автоморфизмы для некоторого $A \in \Sigma$;
- 2) существуют элемент $a \in Q$ и операция $A \in \Sigma$ такие, что $A(a, a) = a$ и трансляции $R_{A,a}, L_{A,a}$ – биекции.

Доказательство следует из предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Ю.М. – УМН, 1998, т. 53, с. 61–114.
2. Jezek J., Kepka T. Medial groupoids. Praha, 1983.
3. Курош А.Г. Общая алгебра. М.: Наука, 1974.
4. Romanovska A.B., Smith J.D.H. Modes. Singapore: World Scientific, 2002.
5. Smith J.D.H. – Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1990, v. 108, p. 435–443.

Ս. Ս. ԴԱՎԻԴՈՎ

ԵՐԿՏԵՂ ԱՐԵԼՅԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐԻ ԳԾԱՅԻՆ
ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆԵՐ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրվում են երկտեղ արելյան հանրահաշիվները դրանք հայտնի հանրահաշիվական կառուցվածքների հետ համադրելու եղանակով: Գտնված են պայմաններ, որոնց դեպքում երկտեղ արելյան հանրահաշիվը ունի գծային ներկայացում, այսինքն՝ գոյություն ունի տեղափոխելի սննդիդ, որի գործողությունով և էնդոմորֆիզմների միջոցով արտահայտվում են արելյան հանրահաշիվի բոլոր գործողությունները:

S. S. DAVIDOV

LINEAR REPRESENTATION OF BINARY ABELIAN ALGEBRAS

Summary

In the present paper binary abelian algebras are studied by bringing them to known algebraic structures such as monoids. We have found conditions when binary abelian algebra has a linear representation i.e. every operation of abelian algebra can be expressed by operation and endomorphisms of commutative monoid.