ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2006 Естественные науки

Математика

УДК 517. 55

А. И. ПЕТРОСЯН

О ВЕСОВЫХ КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^n$

В статье вводятся весовые классы $A^p_\omega(\mathbb{C}^n)$ целых функций нескольких комплексных переменных. Эти классы зависят от параметр-функции $\omega(x)$ и сколь угодно широки. Для функций, принадлежащих $A^2_\omega(\mathbb{C}^n)$, получено интегральное представление.

1. В работе [1] введены весовые классы $A^p_\omega(B)$ функций, голоморфных в единичном шаре B в пространстве $\mathbb{C}^n$. Эти классы сколь угодно широки, ибо зависят от параметр-функции $\omega(x)$ $(0 \le x < 1)$ со сколь угодно быстрым убыванием при $x \to 1-0$. Целью настоящей работы является введение классов $A^p_\omega(\mathbb{C}^n)$ целых функций и получение для них интегрального представления. Приводимые теоремы являются многомерными ω-аналогами результатов М.М. Джрбашяна [2, 3], положивших начало теории классов A^p_α (изначальное обозначение $H^p(\alpha)$) в единичном круге.

Примененный аналитический аппарат позволяет распространить на случай пространства $\mathbb{C}^n$ результаты, полученные в [4] для одномерного случая.

Ниже будем пользоваться следующими обозначениями: $\langle z,w\rangle = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w_k}$ – скалярное произведение для точек $z,w \in \mathbb{C}^n$, а $|z| = \sqrt{\langle z,z\rangle}$ – соответствующая норма; $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ – открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$; $S = \partial B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ – его граница, являющаяся единичной сферой в $\mathbb{C}^n$; ν – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$, нормированная условием $\nu(B) = 1$; σ – борелевская мера на S, инвариантная относительно унитарных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$ и удовлетворяющая условию $\sigma(S) = 1$. С каждым мультииндексом $s = (s_1, \dots, s_n)$ будем связывать числа $s! = \prod_{k=1}^n s_k!$ и

$|s|=\sum_{k=1}^{n}s_k$, а также голоморфный моном $z^s=\prod_{k=1}^{n}z_k^{s_k}$.

2. Приведем некоторые определения и результаты из [1].

Через Ω обозначается множество параметр-функций $\omega(x)$, определенных на интервале $[0,1)$ и удовлетворяющих там условиям:

1) $0<\overset{1-0}{\underset{\delta}{V}}(\omega)<\infty$ для любого $\delta\in[0,1)$;

2) $\Delta_m\equiv\Delta_m(\omega)=-\int_0^1 x^m d\omega(x)\neq 0,\infty,\quad m=0,1,\ldots$;

3) $\liminf\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{|\Delta_m|}\geq 1$.

Далее, для каждой функции $\omega\in\Omega$ определяется ассоциированная с ней мера $d\mu_\omega(w)=-d\omega(r^2)d\sigma(\zeta)$, где $w=r\zeta$ – полярная форма точки $w\in B$, (т. е. $r=|w|$, $\zeta\in S$).

Через $L^p_\omega(B)$ обозначается класс функций, измеримых по мере $d\mu_\omega$ в шаре B, для которых

$$\|f\|_{p,\omega}=\left\{\int_B|f(w)|^p|d\mu_\omega(w)|\right\}^{1/p}<+\infty,\qquad 0<p<\infty, \tag{1}$$

а через $A^p_\omega(B)$ – подмножество $L^p_\omega(B)$, состоящее из функций, голоморфных в B. Для заданного $\omega\in\Omega$ вводится ядро-функция

$$C_\omega(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle z,w\rangle^k}{\gamma_k\Delta_k(\omega)},\quad \text{где}\quad \gamma_k=\frac{(n-1)!k!}{(n-1+k)!}. \tag{2}$$

В [1] доказано следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть $f\in A^p_\omega(B)$. Тогда для $z\in B$

$$f(z)=\int_B f(w)C_\omega(z,w)d\mu_\omega(w), \tag{3}$$

$$f(z)=-\overline{f(0)}+2\int_B\{Re\, f(w)\}C_\omega(z,w)d\mu_\omega(w). \tag{4}$$

Отметим один частный случай формулы (3). Пусть

$$\omega(x)=\int_x^1 t^{n-1}(1-t)^\alpha\,dt,\quad \alpha>-1.$$

Тогда

$$\Delta_m=-\int_0^1 x^m d\omega(x)=\int_0^1 x^{n+m-1}(1-x)^\alpha dx=\frac{\Gamma(n+m)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(n+m+1+\alpha)}.$$

Используя выражение для элемента нормированного объема $d\nu$ в полярных координатах [5], будем иметь

$$d\mu_\omega(w)=-d\omega(r^2)d\sigma(\zeta)=2r^{2n-1}(1-r^2)^\alpha dr\,d\sigma(\zeta)=\frac{1}{n}(1-r^2)^\alpha d\nu(w). \tag{5}$$

Из (1) и (5) следует, что формула (3) в рассматриваемом случае принимает вид

$$f(z)=\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\alpha)}\int_B f(w)\frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}d\nu(w).$$

Эту формулу можно найти в [5].

3. Обозначим через Ω^{∞} множество параметр-функций $\omega(t)$, строго убывающих на полуоси $[0,+\infty)$, таких, что $\omega(0)=1$ и

$$\Delta_k^{\infty}(\omega)=-\int_0^{+\infty} t^k d\omega(t)<+\infty \quad \text{для любого} \quad k=0,1,2\ldots$$

Введем классы целых функций $A_{\omega}^{p}(\mathbb{C}^n)$ $(1\le p<+\infty)$, удовлетворяющих условию

$$\| f \|_{p,\omega}=\left\{ \int_{\mathbb{C}^n} | f(w)|^p \, d\mu_{\omega}(w)\right\}^{1/p}<+\infty, \tag{6}$$

где $d\mu_{\omega}(r\zeta)=-d\omega(r^2)d\sigma(\zeta)$. Соответствующее этой мере лебегово пространство обозначим через $L_{\omega}^{p}(\mathbb{C}^n)$.

Далее построим ω-ядро

$$C_{\omega}^{\infty}(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle z,w\rangle^k}{\gamma_k \Delta_k^{\infty}(\omega)}, \quad \text{где} \quad \gamma_k=\frac{(n-1)!k!}{(n-1+k)!}. \tag{7}$$

Теорема 2. Пусть $f\in A_{\omega}^{2}(\mathbb{C}^n)$, где $\omega\in\Omega^{\infty}$. Тогда для $z\in\mathbb{C}^n$

$$f(z)=\int_{\mathbb{C}^n} f(w)C_{\omega}^{\infty}(z,w)d\mu_{\omega}(w), \tag{8}$$

$$f(z)=-\overline{f(0)}+\int_{\mathbb{C}^n}\{Re f(w)\}C_{\omega}^{\infty}(z,w)d\mu_{\omega}(w). \tag{9}$$

Доказательство. Для произвольного $r>0$ введем функцию $\omega_r(t)=\omega(r^2t)$ $(0\le t\le 1)$ и обозначим $\Delta_k^{r}(\omega)=-\int_0^{r^2} t^k d\omega(t)$. Легко видеть, что $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\Delta_k(\omega_r)}=r^2$. Очевидно, что $\Delta_k(\omega_r)=r^{-2k}\Delta_k^{r}(\omega)$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\Delta_k(\omega_r)}=1$. Следовательно, $\omega_r\in\Omega$. С другой стороны, $f(rz)\in A_{\omega_r}^{2}$ (в $|z|<1$). Поэтому обе формулы (3) и (4) для $f(rz)$ справедливы. Заметив, что

$$C_{\omega_r}\left(\frac{z}{r},\frac{w}{r}\right)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle z,w\rangle^k}{\gamma_k r^2\Delta_k^{\infty}(\omega)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle z,w\rangle^k}{\gamma_k\Delta_k^{r}(\omega)}\equiv C_{\omega}^{r}(z,w), \quad |z|<r^2,$$

и $d\mu_{\omega_r}\left(\dfrac{w}{r}\right)=d\mu_{\omega}(w)$, перепишем (3) в виде

$$f(z)=\int_{|w|<r} f(w)C_{\omega}^{r}(z,w)d\mu_{\omega}(w), \quad |z|<r. \tag{10}$$

Чтобы получить (8), нужно доказать, что для любой фиксированной точки $z\in\mathbb{C}^n$ имеет место равенство

$$\lim_{r\to\infty}\int_{|w|<r} f(w)C_{\omega}^{r}(z,w)d\mu_{\omega}(w)=\int_{\mathbb{C}^n} f(w)C_{\omega}^{\infty}(z,w)d\mu_{\omega}(w). \tag{11}$$

Для этого заметим, что $\Delta_k^{r}(\omega)\uparrow_r$. Тогда $\liminf\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\Delta_k^{\infty}(\omega)}\ge r^2$ для любого $r>0$ и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\Delta_k^{\infty}(\omega)}=+\infty$. Итак, радиус сходимости степенного ряда $C_{\omega}^{\infty}(z,\cdot)$ бесконечен, т. е. $C_{\omega}^{\infty}(z,\cdot)$ является целой функцией. Используя неравенство Буняковского, будем иметь

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(w)C_\omega^\infty(z,w)|\,d\mu_\omega(w) \le \|f\|_{2,\omega} \left\{\int_{\mathbb{C}^n} |C_\omega^\infty(z,w)|^2\,d\mu_\omega(w)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|f\|_{2,\omega} \left\{\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(\gamma_k\Delta_k^\infty)^2}\int_{\mathbb{C}^n} |\langle z,\rho\zeta\rangle^{2k}|\,d\mu_\omega(\rho\zeta)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|f\|_{2,\omega} \left\{\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(\gamma_k\Delta_k^\infty)^2}\int_0^\infty \rho^{2k}\,d\omega(\rho^2)\int_S |\langle z,\zeta\rangle|^{2k}\,d\sigma(\zeta)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, из формулы, аналогичной биному Ньютона для n переменных, следует

$$\int_S |\langle z,\zeta\rangle|^{2k}\,d\sigma(\zeta) = \int_S \sum_{|\alpha|=k}\sum_{|\beta|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}\frac{|\beta|!}{\beta!} z^\alpha \bar\zeta^\alpha \bar z^\beta \zeta^\beta\,d\sigma(\zeta) =$$
$$= \sum_{|\alpha|=k}\left(\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\right)^2 \frac{(n-1)!\,\alpha!}{(n-1+|\alpha|)!} z^\alpha \bar z^\alpha = \sum_{|\alpha|=k}\frac{|\alpha|!}{\alpha!} z^\alpha \bar z^\alpha \gamma_{|\alpha|} = \gamma_k\langle z,z\rangle^k. \tag{12}$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(w)C_\omega^\infty(z,w)|\,d\mu_\omega(w) \le$$
$$\le \|f\|_{2,\omega}\left\{\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\left(\gamma_k\Delta_k^\infty\right)^2}\Delta_k^\infty\gamma_k\langle z,z\rangle^k\right\}^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{2,\omega}\sqrt{C_\omega^\infty(z,z)}. \tag{13}$$

Таким образом, предельное соотношение (11) равносильно равенству

$$\lim_{r\to\infty}\int_{|w|<r} f(w)[C_\omega^r(z,w) - C_\omega^\infty(z,w)]\,d\mu_\omega(w) = 0.$$

Докажем это равенство. Обозначим $|z| = r_0$ и заметим, что если $r_0 + 1 < r_1 < r < +\infty$, то будем иметь

$$I(r) \equiv \left|\int_{|w|<r} f(w)(C_\omega^r(z,w) - C_\omega^\infty(z,w))\,d\mu_\omega(w)\right| \le$$
$$\le \int_{|w|<r_1} |f(w)(C_\omega^r(z,w) - C_\omega^\infty(z,w))|\,d\mu_\omega(w) +$$
$$+ \int_{r_1<|w|<r} |f(w)C_\omega^r(z,w)|\,d\mu_\omega(w) +$$
$$+ \int_{r_1<|w|<r} |f(w)C_\omega^\infty(z,w)|\,d\mu_\omega(w) \equiv I_1(r) + I_2(r) + I_3(r).$$

Для оценки слагаемого $I_2(r)$ еще раз применяем неравенство Буняковского:

$$I_2(r) \le \left\{\int\limits_{r_1<|w|<r} |f(w)|^2\,d\mu_\omega(w)\int\limits_{r_1<|w|<r} |C_\omega^r(z,w)|^2\,d\mu_\omega(w)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left\{\int\limits_{r_1<|w|<r} |f(w)|^2\,d\mu_\omega(w)\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(\gamma_k\Delta_k^r)^2}\int\limits_{r_1<|w|<r} |\langle z,w\rangle|^{2k}\,d\mu_\omega(w)\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Далее, согласно (12),

$$\int\limits_{r_1<|w|<r} |\langle z,w\rangle|^{2k}\,d\mu_\omega(w)=\int_S \langle z,\zeta\rangle|^{2k}\,d\sigma(\zeta)\int_{r_1}^{r}\rho^{2k}\,|d\omega(\rho^2)|=$$
$$=\gamma_k\langle z,z\rangle^k\int_{r_1}^{r}\rho^{2k}\,|d\omega(\rho^2)|. \tag{15}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma_k\Delta_k^r)^2}\int_{r_1<|w|<r}\langle z,w\rangle|^{2k}\,d\mu_\omega(w)\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma_k\Delta_k^r)^2}\sum_{|\alpha|=k}|z^\alpha|^2\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\gamma_{|\alpha|}\Delta_{|\alpha|}^r=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle z,z\rangle^k}{\gamma_k\Delta_k^r}\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle z,z\rangle^k}{\gamma_k\Delta_k^{r_0+1}}=C_\omega^{r_0+1}(z,z)<+\infty.$$

Поэтому $I_2(r)<\varepsilon/3$ для заданного $\varepsilon>0$ при достаточно большом r_1. С другой стороны, из (13) следует, что $I_3(r)<\varepsilon/3$ также для достаточно большого r_1. Далее, для фиксированного r_1 получаем

$$I_1(r)\le\|f\|_{2,\omega}\left\{\int_{|w|<r_1}|C_\omega^r(z,w)-C_\omega^\infty(z,w)|^2\,d\mu_\omega(w)\right\}^{1/2}=$$
$$=\|f\|_{2,\omega}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma_k\Delta_k^r}-\frac{1}{\gamma_k\Delta_k^\infty}\right)^2\int_{|w|<r_1}\langle z,w\rangle|^{2k}\,d\mu_\omega(w)\right\}^{1/2}. \tag{16}$$

Следовательно, ввиду (15), имеем

$$I_1(r)\le\|f\|_{2,\omega}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\Delta_k^r}-\frac{1}{\Delta_k^\infty}\right)^2\langle z,z\rangle^k\int_0^{r_1}\rho^{2|\alpha|}\,|d\omega(\rho^2)|\right\}^{1/2}.$$

При этом ряд в правой части имеет сходящуюся мажоранту, не зависящую от r. В самом деле,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\Delta_k^r}-\frac{1}{\Delta_k^\infty}\right)^2\langle z,z\rangle^k\int_0^{r_1}\rho^{2k}\,|d\omega(\rho^2)|\le\sum_{k=0}^{\infty}\langle z,z\rangle^k\left(\frac{2}{\Delta_k^r}\right)^2\Delta_k^{r_1}\le$$
$$\le 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle z,z\rangle^k}{\Delta_k^{r_1}}=4C_\omega^{r_1}(z,z)<+\infty.$$

Следовательно, правая часть (16) стремится к нулю при $r\to+\infty$, и поэтому $I_1(r)<\varepsilon/3$ для достаточно большого r. Итак, мы получаем, что $I(r)\to 0$ при $r\to+\infty$. Отсюда следует справедливость (8). Для доказательства (9) применяем вышеприведенные рассуждения к формуле (4) для $F(rz)$. ▶

4. Ядро $C_\omega^\infty(z,w)$ порождает оператор ортогонального проектирования из $L_\omega^2(\mathbb{C}^n)$ на подпространство $A_\omega^2(\mathbb{C}^n)$. А именно, имеет место следующая

Теорема 3. Пусть

$$Q_\omega f(z)=\int_{\mathbb{C}^n}f(w)C_\omega^\infty(z,w)\,d\mu_\omega(w),\quad z\in\mathbb{C}^n,$$

где $f\in L_\omega^2(\mathbb{C}^n)$. *Тогда* Q_ω *является ортогональным проектором из* $L_\omega^2(\mathbb{C}^n)$ *на* $A_\omega^2(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. Пусть $L^2_\omega(\mathbb{C}^n)=A^2_\omega(\mathbb{C}^n)\oplus\left[A^2_\omega(\mathbb{C}^n)\right]^\perp$ и $f=f_1+f_2$ – соответствующее разложение функции $f\in A^2_\omega(\mathbb{C}^n)$. Имеем $Q_\omega f=Q_\omega f_1+Q_\omega f_2$. По теореме 2, $Q_\omega f_1=f_1$. С другой стороны,

$$Q_\omega f_2(z)=\int_{\mathbb{C}^n} f_2(w)C^\infty_\omega(z,w)\,d\mu_\omega(w)=\left\langle f_2,\overline{C^\infty_\omega(z,\cdot)}\right\rangle_\omega=0,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$ – скалярное произведение в $L^2_\omega(\mathbb{C}^n)$. Равенство нулю следует из того, что при фиксированном $z\in C^n$ функция $\overline{C^\infty_\omega(z,w)}=C^\infty_\omega(w,z)$ является целой относительно w, а f_2 ортогональна к $A^2_\omega(\mathbb{C}^n)$. Итак, $Q_\omega f=f_1$ для произвольной функции $f\in A^2_\omega(\mathbb{C}^n)$, а это и означает, что Q_ω – проектор из $L^2_\omega(\mathbb{C}^n)$ на $A^2_\omega(\mathbb{C}^n)$. ►

Кафедра теории функций *Поступила 30.06.2005*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Petrosyan A.I.** – Journal of Analysis and Applications, 2005, v. 3, № 1, p. 47–53.
2. **Джрбашян М.М.** – ДАН Армянской ССР, 1945, т. 3, № 1, с. 3–9.
3. **Джрбашян. М.М.** К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. Института матем. и мех. АН Армянской ССР, 1948, т. 2, с. 3–40.
4. **Jerbashian A.M.** – Complex Variables, 2005, v. 50, № 3, p. 155–183.
5. **Рудин У.** Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

$\mathbb{C}^n$ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿՇՌԱՅԻՆ ԴԱՍԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ներմուծվում են մի քանի կոմպլեքս փոփոխականների ամբողջ ֆունկցիաների $A^p_\omega(\mathbb{C}^n)$ կշռային դասեր: Այդ դասերը կախված են $\omega(x)$ պարամետր-ֆունկցիայից և կամայական չափով լայն են: $A^2_\omega(\mathbb{C}^n)$-ին պատկանող ֆունկցիաների համար արտածվում է ինտեգրալային ներկայացում:

A. I. PETROSYAN

ON WEIGHTED CLASSES OF ENTIRE FUNCTIONS IN $\mathbb{C}^n$

Summary

In the paper the weighted classes $A^p_\omega(\mathbb{C}^n)$ of entire functions of several complex variables are introduced. These classes depend on parameter-function $\omega(x)$ and they are arbitrarily large. For functions belonging to $A^2_\omega(\mathbb{C}^n)$ the integral representation is obtained.