ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2006 Естественные науки

Математика

УДК 517.984.5

А. А. АСАТРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ, ИМЕЮЩИМ ОПРЕДЕЛЕННОЕ ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

В пространстве $L^2(\mathbb{R})$ рассматривается оператор Штурма–Лиувилля L с потенциалом, имеющим определенное поведение на бесконечности. Доказывается, что собственные значения оператора L (если таковые имеются) простые и их число конечно.

Рассмотрим на $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ дифференциальную операцию l, заданную формулой $l(y)=-y''+qy$, где коэффициент (потенциал) q – вещественная измеримая функция от переменной $x\in\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{0}\left|q(x)-a^-\right|dx+\int_{0}^{\infty}\left|q(x)-a^+\right|dx<\infty, \tag{1}$$

с некоторыми постоянными $a^{\pm}\in\mathbb{R}$.

Действующий в пространсве $L^2(\mathbb{R})$ оператор Штурма–Луивилля L определим следующим образом (см. [1], с. 192). Область определения D оператора L состоит из функций $y\in L^2(\mathbb{R})$, имеющих абсолютно непрерывные на каждом отрезке $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ производные и $l(y)\in L^2(\mathbb{R})$. Для $y\in D$ по определению полагается $Ly=l(y)$.

В работе [2] доказано, что оператор L самосопряжен и имеет ограниченный точечный спектр, предельные точки которого (если таковые имеются) принадлежат множеству $\{a^+,a^-\}$. Нижеследующие две теоремы дополняют эти результаты.

При $a^+=a^-=0$ точечный спектр оператора L был исследован Л.Д. Фаддеевым (см. [3]; [4], с. 269), а в случае $a^+=a^-\neq 0$ исследование сводится к вышеуказанному случаю. Поэтому будем считать $a^+\neq a^-$.

Обозначим $\mu_1 = \min\{a^+, a^-\}$, $\mu_2 = \max\{a^+, a^-\}$, $\lambda_j^{\pm}(\mu) = (-1)^{j-1}\sqrt{\mu - a^{\pm}}$, где $\mu \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$ (для корня берется главное значение).

Теорема 1. При условии (1) собственные значения оператора L простые и лежат в интервале $(-\infty, \mu_1]$.

Доказательство. Как известно (см. [2]), для каждого $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{a^+\}$ уравнение $l(y) = \mu y$ имеет линейно независимые решения $y_1^+(x,\mu), y_2^+(x,\mu)$, для которых при $x \to \infty$ выполняются асимптотические равенства

$$y_j^+(x,\mu) = e^{ix\lambda_j^+(\mu)}\left[1 + o(1)\right] \quad (j = 1,2). \tag{2}$$

Кроме того, при $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{a^-\}$ уравнение $l(y) = \mu y$ имеет линейно независимые решения $y_1^-(x,\mu)$, $y_2^-(x,\mu)$, для которых при $x \to -\infty$ выполняются асимптотические равенства

$$y_j^-(x,\mu) = e^{ix\lambda_j^-(\mu)}\left[1 + o(1)\right] \quad (j = 1,2). \tag{3}$$

Из формул (2), (3) следует, что при $\mu \in (\mu_1, \infty)$ уравнение $l(y) = \mu y$ не имеет нетривиальных решений, принадлежащих $L^2(\mathbb{R})$. Следовательно, собственные значения оператора L лежат в интервале $(-\infty, \mu_1]$. Те же формулы показывают, что при $\mu \in (-\infty, \mu_1]$ по меньшей мере одно из решений $y_1^+(x,\mu)$, $y_2^+(x,\mu)$, $y_1^-(x,\mu)$, $y_2^-(x,\mu)$ не принадлежит $L^2(\mathbb{R})$. Отсюда вытекает, что собственные значения оператора L простые, поскольку в противном случае все решения уравнения $l(y) = \mu y$ принадлежали бы $L^2(\mathbb{R})$.

Теорема доказана.

Известно (см. [4], с. 162–166), что если функция q для каждого $a \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $\int_a^{\infty}(1+|x|)\left|q(x) - a^+\right|dx < \infty$ с некоторым числом $a^+ \in \mathbb{R}$, то для всякого числа $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, уравнение $l(y) = \left(\lambda^2 + a^+\right)y$ имеет решение $y^+(x,\lambda)$, представимое в виде

$$y^+(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} e^{i\lambda t} K^+(x,t)\,dt \quad (-\infty < x < \infty). \tag{4}$$

При этом ядро $K^+(x,t)$ $(-\infty < x \leq t < \infty)$ не зависит от λ, вещественно, непрерывно по совокупности переменных x, t и удовлетворяет оценке

$$\left|K^+(x,t)\right| \leq \frac{1}{2} h^+\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left[h_1^+(x) - h_1^+\left(\frac{x+t}{2}\right)\right] \quad (-\infty < x \leq t < \infty), \tag{5}$$

где

$$h^+(x) = \int_x^{\infty}\left|q(t) - a^+\right|dt, \quad h_1^+(x) = \int_x^{\infty} h^+(t)\,dt \quad (-\infty < x < \infty).$$

Используя представление (4) и оценку (5), нетрудно доказать, что решение $y^{+}(x,\lambda)\left(x\in\mathbb{R},\operatorname{Im}\lambda\geq 0\right)$ непрерывно по совокупности переменных x, λ.

Если же измеримая функция q для каждого $a\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условию $\int\limits_{-\infty}^{a}(1+|x|)\left|q(x)-a^{-}\right|dx<\infty$ с некоторым числом $a^{-}\in\mathbb{R}$, то для всякого числа $\lambda\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda\leq 0$, уравнение $l(y)=\left(\lambda^{2}+a^{-}\right)y$ имеет решение $y^{-}(x,\lambda)\left(x\in\mathbb{R},\ \operatorname{Im}\lambda\leq 0\right)$, представимое в виде

$$y^{-}(x,\lambda)=e^{i\lambda x}+\int\limits_{-\infty}^{x}e^{i\lambda t}K^{-}(x,t)dt\left(-\infty<x<\infty\right),$$

причем справедливы утверждения, аналогичные вышесказанным.

Теорема 2. Пусть функция q удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{0}(1-x)\left|q(x)-a^{-}\right|dx+\int\limits_{0}^{\infty}(1+x)\left|q(x)-a^{+}\right|dx<\infty \tag{6}$$

с некоторыми вещественными постоянными $a^{\pm}$. Тогда собственные значения оператора L (если таковые имеются) лежат в интервале $\left(-\infty,\mu_{1}\right)$ и их число конечно.

Доказательство. Сначала докажем, что число μ_{1} не является собственным значением оператора L. С этой целью установим, что при условии (6) уравнения $l(y)=a^{\pm}y$ не имеют нетривиальных решений, принадлежащих $L^{2}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим случай уравнения $l(y)=a^{+}y$ (другой случай исследуется аналогично). Известно, что это уравнение имеет фундаментальную систему решений $y_{j}^{+}(x)\left(x\in R;\,j=1,2\right)$, для которых при $x\to\infty$ справедливы асимптотические равенства $y_{1}^{+}(x)=1+o(1)$, $y_{2}^{+}(x)=x\left[1+o(1)\right]$. Последние показывают, что никакая нетривиальная линейная комбинация функций y_{1}^{+},y_{2}^{+} не принадлежит $L^{2}(\mathbb{R})$. Поэтому уравнение $l(y)=a^{+}y$ не имеет нетривиальных решений, принадлежащих $L^{2}(\mathbb{R})$.

Теперь покажем, что число собственных значений оператора L конечно. Допустим противное. Как выше отмечалось, собственные значения оператора L образуют ограниченное множество, предельные точки которого (если таковые имеются) принадлежат множеству $\left\{a^{+},a^{-}\right\}$. Согласно теореме 1, собственные значения оператора L лежат в интервале $\left(-\infty,\mu_{1}\right]$, и потому для них предельной точкой может быть только число μ_{1}. Следовательно, существует строго возрастающая последовательность собственных значений $\left\{\theta_{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, которая сходится к μ_{1}. Для каждого натурального k числа $\lambda_{1}^{+}\left(\theta_{k}\right)$ и

$\lambda_2^-(\theta_k)$ лежат соответственно в верхней и нижней частях мнимой оси, а функции

$$y_k(x) = y^+\left(x, \lambda_1^+(\theta_k)\right) \tag{7}$$

и $y^-\left(x, \lambda_2^-(\theta_k)\right)$ вещественны и являются собственными функциями, соответствующими собственному значению θ_k. Следовательно, существуют числа $c_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ такие, что

$$y_k(x) = c_k y^-\left(x, \lambda_2^-(\theta_k)\right) \ (k = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Поскольку собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны, то

$$(y_k, y_{k+1})_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} y_k(x) y_{k+1}(x) dx = 0 \ (k = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что для некоторых k равенство (9) нарушается.

Так как $\theta_k \underset{k\to\infty}{\to} \mu_1$, то $\lambda_1^+(\theta_k) \underset{k\to\infty}{\to} \lambda_1^+(\mu_1)$, $\lambda_2^-(\theta_k) \underset{k\to\infty}{\to} \lambda_2^-(\mu_1)$. Следовательно, существует такое число $M > 0$, что

$$\left|\lambda_1^+(\theta_k)\right| \le M, \ \left|\lambda_2^-(\theta_k)\right| \le M \ (k = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

В силу (4), (5) и аналогичных соотношений для $y^-(x, \lambda)$ имеют место представления

$$y^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x}\left[1 + r^+(x, \lambda)\right] \ (x \in \mathbb{R}, \operatorname{Im}\lambda \ge 0),$$

$$y^-(x, \lambda) = e^{i\lambda x}\left[1 + r^-(x, \lambda)\right] \ (x \in \mathbb{R}, \operatorname{Im}\lambda \le 0),$$

где

$$r^+(x, \lambda) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} 0 (\operatorname{Im}\lambda \ge 0), \tag{11}$$

$$r^-(x, \lambda) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} 0 (\operatorname{Im}\lambda \ge 0) \tag{12}$$

(знак $\rightrightarrows$ означает равномерную сходимость). С учетом (11), (12) число $A > 0$ выберем так, чтобы

$$\left|r^+(x, \lambda)\right| \le \frac{1}{2} \ (x \ge A, \operatorname{Im}\lambda \ge 0),$$

$$\left|r^-(x, \lambda)\right| \le \frac{1}{2} \ (x \le -A, \operatorname{Im}\lambda \le 0).$$

Тогда справедливы неравенства

$$y^+\left(x, \lambda_1^+(\theta_k)\right) y^+\left(x, \lambda_1^+(\theta_{k+1})\right) \ge \frac{e^{i\left[\lambda_1^+(\theta_k) + \lambda_1^+(\theta_{k+1})\right]x}}{2} \ (x \ge A, \ k = 1, 2, \ldots), \tag{13}$$

$$y^-\left(x, \lambda_2^-(\theta_k)\right) y^-\left(x, \lambda_2^-(\theta_{k+1})\right) \ge \frac{e^{i\left[\lambda_2^-(\theta_k) + \lambda_2^-(\theta_{k+1})\right]x}}{2} \ (x \le -A, \ k = 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_k(x)y_{k+1}(x)dx = \int_{-\infty}^{-A} y_k(x)y_{k+1}(x)dx + \int_{-A}^{A} y_k(x)y_{k+1}(x)dx +$$

$$+\int_{A}^{\infty} y_k(x)y_{k+1}(x)dx. \tag{15}$$

Оценим снизу каждое слагаемое правой части (15).

Из (7), (13), (10) получаем

$$\int_{A}^{\infty} y_k(x)y_{k+1}(x)dx \ge \frac{e^{-2AM}}{8M} \quad (k=1,2,\ldots). \tag{16}$$

Из (14), (10) аналогично следует, что

$$\int_{-\infty}^{-A} y^-\left(x,\lambda_2^-(\theta_k)\right)y^-\left(x,\lambda_2^-(\theta_{k+1})\right)dx \ge \frac{e^{-2AM}}{8M} \quad (k=1,2,\ldots). \tag{17}$$

Пользуясь соотношениями (7), (8) и непрерывностью функций $y^{\pm}(x,\lambda)$, нетрудно убедиться, что последовательность $\{c_k\}$ имеет предел $c \ne 0$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}(c_k c_{k+1}) = c^2 > 0$ и, следовательно, существует такое натуральное число k_1, что $c_k c_{k+1} \ge \dfrac{c^2}{2}$ $(k \ge k_1)$. Отсюда и из (8), (17) вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{-A} y_k(x)y_{k+1}(x)dx \ge \frac{c^2 e^{-2AM}}{16M} \quad (k \ge k_1). \tag{18}$$

Из (15), (16), (18) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_k(x)y_{k+1}(x)dx \ge \frac{2+c^2}{16M}e^{-2AM} + \int_{-A}^{A} y_k(x)y_{k+1}(x)dx \quad (k \ge k_1). \tag{19}$$

Из равномерной непрерывности функции $y^+(x,\lambda)$ на компакте

$$G = \{(x,\lambda): -A \le x \le A, |\lambda| \le M, \operatorname{Im}\lambda \ge 0\} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{C}$$

и из соотношения $\lambda_1^+(\theta_k) \underset{k\to\infty}{\to} \lambda_1^+(\mu_1)$ следует, что

$$y_k(x)y_{k+1}(x) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} \left[y^+\left(x,\lambda_1^+(\mu_1)\right)\right]^2 \quad (-A \le x \le A).$$

Отсюда имеем, что $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{-A}^{A} y_k(x)y_{k+1}(x)dx = \int_{-A}^{A}\left[y^+\left(x,\lambda_1^+(\mu_1)\right)\right]^2 dx \ge 0$.

Поэтому выражение в правой части (19) при $k\to\infty$ имеет положительный предел. Следовательно, номер $k_0 \ge k_1$ можно выбрать так, чтобы при $k \ge k_0$ указанное выражение было положительным. Тогда из (19) получим неравенство $\int_{-\infty}^{\infty} y_k(x)y_{k+1}(x)dx > 0$ $(k \ge k_0)$, которое показывает, что при $k \ge k_0$ равенство (9) нарушается.

Теорема доказана.

Автор приносит глубокую благодарность профессору И.Г. Хачатряну за постановку задачи и полезные обсуждения результатов.

Кафедра дифференциальных уравнений *Поступила 01.07.2005*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Наймарк М.А.** Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. **Петросян А.Г.** – Ученые записки ЕГУ, 2003, № 3, с. 8–15.
3. **Фаддеев Л.Д.** – Труды Мат. ин-та АН СССР, 1964, № 73, с. 314–336.
4. **Марченко В.А.** Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.

Հ. Ա. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

ԱՆՎԵՐՋՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՈՐՈՇԱԿԻ ՎԱՐՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊՈՏԵՆՑԻԱԼՈՎ ՇՏՈՒՐՄ-ԼԻՈՒՎԻԼԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ԿԵՏԱՅԻՆ ՍՊԵԿՏՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

$L^2(R)$ տարածությունում դիտարկվում է անվերջությունում որոշակի վարք ունեցող պոտենցիալով Շտուրմ–Լիուվիլի L օպերատորը: Ապացուցվում է, որ L օպերատորի սեփական արժեքները պարզ են և նրանց թիվը վերջավոր է:

H. A. ASATRYAN

ANALYSIS OF THE POINT SPECTRUM OF THE STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH CERTAIN BEHAVIOR OF POTENTIAL AT INFINITY

Summary

In the space $L^2(R)$ the Sturm–Liouville operator L with certain behavior of potential at infinity is considered. We prove that the eigenvalues of L are simple and are finite in number.