ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2006 Естественные науки

Математика

УДК 518:517.944/.947

Ю. Г. ДАДАЯН

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА ПОКООРДИНАТНО СГУЩАЮЩИХСЯ СЕТКАХ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Работа посвящена изучению поведения решений первой краевой задачи для бигармонического уравнения в окрестности угловых точек. Доказывается, что обобщенное решение рассматриваемой задачи можно представить в виде, позволяющем строить вариационно-разностные схемы на нерегулярной сетке. Получены предельные по порядку оценки скорости сходимости.

1. Постановка задачи. В области Ω с границей S, состоящей из конечного числа гладких кривых, пересекающихся под углами, отличными от 0 и 2π (имеются в виду внутренние углы), рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}=f, \quad f\in L_2(\Omega) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$U\big|_S=0, \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_S=0\,. \tag{2}$$

В работе приняты следующие обозначения: $W_2^K(\Omega)$ – пространства Соболева; $\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$ – множество функций из $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2); C, с индексами или без них, – различные положительные постоянные в оценках.

Умножая скалярно уравнение (1) на функцию $\Phi\in\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$ и интегрируя по частям, получим интегральное тождество

$$L_\Omega(U,\Phi)\equiv\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)d\,\Omega=\int_\Omega f\,\Phi\,d\,\Omega\,. \tag{3}$$

Обобщенным решением задачи (1)–(2) назовем функцию $U(x,y)$ из $\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству (3) для произвольной функции $\Phi\in\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$. Предположим, что справедливо неравенство

$$L_\Omega(U,U) \geq C\|U\|^2_{2,\Omega} \quad \forall U \in \overset{0}{W}{}^2_2(\Omega). \tag{4}$$

Отсюда, очевидно, следует единственность обобщенного решения.

Если $f \in L_2(\Omega)$, то обобщенное решение краевой задачи (1)–(2), в предположении достаточной гладкости границы области, существует и принадлежит пространству $W^4_2(\Omega)$, причем (см. [1]) $\|U\|_{4,\Omega} \leq C\|f\|_{0,\Omega}$.

2. Поведение обобщенного решения в окрестности угловой точки. При наличии угловых точек у границы области обобщенное решение задачи (1)–(2) не принадлежит пространству $W^4_2(\Omega)$ (см. [2]).

Для этой задачи справедливо следующее утверждение: существует обобщенное решение $U \in \overset{0}{W}{}^2_2(\Omega)$, представимое в виде

$$U = w + \sum_{n=1}^{k} \gamma_n \psi_n, \tag{5}$$

где $w \in W^4_2(\Omega)$, γ_n – некоторые постоянные, k – натуральное число, $\psi_n \in W^2_2(\Omega)$ не зависят от правой части уравнения (1) и такие, что:

1) каждой особой точке соответствует не более семи функций ψ_n;

2) каждую из функций ψ_n можно считать отличной от нуля лишь в окрестности особой точки, которой она соответствует;

3) функции ψ_n удовлетворяют граничным условиям (2). Кроме того, справедлива оценка $\|w\|^2_{4,\Omega} + \sum_{n=1}^{k} |\gamma_n|^2 \leq C\|f\|^2_{0,\Omega}$.

Функции ψ_n в представлении (5) будем называть функциями особенности. Знание явного вида функций ψ_n в (5) позволит строить вариационно-разностные схемы (ВСР), имеющие ту же скорость сходимости, что и для задач без особенностей (см. [3, 4]).

Как определить явный вид функций в (5)?

Пусть область Ω имеет одну угловую точку, которая находится в начале координат. Предположим также, что центр единичного круга также находится в начале координат. Пусть пересечение Ω с единичным кругом есть сектор ω раствора 2β и оси полярной системы координат ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) расположены так, что сектор в ней задается условиями: $0 < r < 1$, $-\beta < \theta < \beta$.

Рассмотрим в ω следующую задачу:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 U}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 U}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{4}{r^4}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 U}{\partial \theta^4} = 0, \tag{6}$$

$$U(r,\beta) = U(r,-\beta) = \left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=\beta} = \left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=-\beta} = 0. \tag{7}$$

Будем искать решение задачи (6)–(7) в виде $U = r^{\lambda}\Phi(\theta)$. Подставляя U в уравнение (6), получим уравнение

$$\Phi^{IV}(\theta) + (\lambda^2 + (\lambda-2)^2)\Phi''(\theta) + \lambda^2(\lambda-2)^2\Phi(\theta) = 0 \qquad (8)$$

с краевыми условиями

$$\Phi(\beta) = \Phi(-\beta) = \Phi'(\beta) = \Phi'(-\beta) = 0. \qquad (9)$$

Нетрудно показать, что числа $\pm\lambda i$ и $\pm(\lambda-2)i$ являются решениями характеристического уравнения, соответствующего уравнению (8). Поэтому функция $\Phi_1(\theta) = C_1\cos\lambda\theta + C_2\cos(\lambda-2)\theta$ удовлетворяет уравнению (8). Из условий (9) получим:

$$\begin{cases} C_1\cos\lambda\beta + C_2\cos(\lambda-2)\beta = 0, \\ -C_1\lambda\sin\lambda\beta - C_2(\lambda-2)\sin(\lambda-2)\beta = 0. \end{cases}$$

Эта однородная система относительно C_1 и C_2 имеет ненулевое решение, если λ – корень определителя этой системы, то есть

$$-(\lambda-2)\sin(\lambda-2)\beta\cos\lambda\beta + \lambda\sin\lambda\beta\cos(\lambda-2)\beta = 0$$

или

$$\sin\gamma z + z\sin\gamma = 0, \qquad (10)$$

где $\gamma = 2\beta$, $z = \lambda - 1$.

Так как $\Phi_2(\theta) = C_3\sin\lambda\theta + C_4\sin(\lambda-2)\theta$ также является решением уравнения (8), то аналогично получим

$$\sin\gamma z - z\sin\gamma = 0. \qquad (11)$$

Уравнение (10) и (11) могут быть записаны в виде $\sin^2\gamma z - z^2\sin^2\gamma = 0$. Вводя обозначение $x = \gamma z$, имеем

$$\sin^2 x - \frac{\sin^2\gamma}{\gamma^2}x^2 = 0. \qquad (12)$$

Полученное трансцендентное уравнение относительно λ легко решается графически.

Покажем теперь, что при $\lambda < 3$ решение задачи (6)–(7) не принадлежит $W_2^4(\omega)$. Действительно,

$$\|U\|_{4,\omega}^2 \ge \int_{\omega}\left(\frac{\partial^4 U}{\partial r^4}\right)^2 r\,dr\,d\theta = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\int_0^1\int_{-\beta}^{\beta} r^{2\lambda-7}\Phi^2(\theta)\,d\theta\,dr.$$

Поскольку при $\lambda < 3$ последний интеграл расходится, то $U \notin W_2^4(\omega)$. Аналогично получим, что если $\lambda > 1$, то $U \in W_2^2(\omega)$.

Построим графики $y = |\sin x|$ и $y = \left|\dfrac{\sin\gamma}{\gamma}\right|x$, учитывая, что $x = (\lambda-1)\gamma$ и $1 < \lambda < 3$. Ясно, что для любого γ надо брать те корни уравнения (12), которые принадлежат промежутку $(0, 2\gamma)$. Такие корни существуют (например, $x = \gamma$). Из условия $(\lambda-1)\gamma = \lambda$ получим, что $\lambda = 2$. Так как

$0<x<4\pi$, то нетрудно убедиться в том, что соответствующие графики пересекаются не более, чем в семи точках.

3. Покоординатное сгущение сетки вблизи особых точек. Пусть, ради простоты, граница Ω имеет только одну угловую точку с внутренним углом $\frac{3\pi}{2}$, расположенную в начале координат. Предположим, что в окрестности особой точки граница области прямолинейна. Пусть при этом отрицательные оси OX и OY направлены по линиям границы. Координатную ось OX (соответственно OY) и параллельные ей прямые будем называть горизонтальными (вертикальными) прямыми. Пусть $h=\frac{1}{N}$ – достаточно малый параметр. Отметим на оси OX точки $x_i=(i\,h)^{\frac{1}{\alpha}}sign(i)$, $i=0,\pm1,\ldots,\pm N$, и $x_i=i\,h\,sign(i)$, $i=\pm(N+1),\pm(N+2),\ldots$, где $0<\alpha<1$. Через отмеченные точки проведем вертикальные прямые. Аналогичным образом на оси OY отметим точки $y_j=x_j$ ($j=0,\pm1,\pm2,\ldots$) и проведем горизонтальные прямые. В результате плоскость (x,y) разобьем на прямоугольники $\Pi_{ij}=[x_{i-1}\le x\le x_i;\; y_{j-1}\le y\le y_j]$, которые назовем ячейками сетки. Обозначим $h_i=x_i-x_{i-1}$. Точки с координатами (x_i,y_j) являются узлами сетки. Нетрудно показать, что

$$C_1(i\,h)^{\frac{1}{\alpha}-1}\le\frac{h_i}{h}\le C_2(i\,h)^{\frac{1}{\alpha}-1}, \tag{13}$$

где C_1 и C_2 не зависят как от i, так и от h.

Рассмотрим наименьшее объединение ячеек сетки, содержащее Ω. Это множество замкнуто. Отбрасывая его границу, получим область, которую назовем сеточной. Обозначим ее через Ω^h_{ex}. Через R_h обозначим множество узлов, принадлежащих $\bar{\Omega}^h_{eh}$. Если граница области имеет несколько угловых точек, то сетка строится так, как в [5].

4. Эрмитово восполнение. Для описания восполнения, которое называется эрмитовым [1], рассмотрим две функции:

$$\varphi(t)=\begin{cases}(1+2|t|)(1-|t|)^2, & |t|\le1,\\ 0, & |t|>1,\end{cases}\qquad \psi(t)=\begin{cases}t(1-|t|)^2, & |t|\le1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

Чтобы описать эрмитово восполнение, рассмотрим набор из четырех стандартных функций, заданных во всем пространстве R^2:

$$\Phi^1(S,t)=\varphi(S)\varphi(t),\qquad \Phi^2(S,t)=\psi(S)\varphi(t),$$
$$\Phi^3(S,t)=\varphi(S)\psi(t),\qquad \Phi^4(S,t)=\psi(S)\psi(t).$$

Каждому узлу $(x_i,y_j)\in R_h$ поставим в соответствие четыре функции

$$\Phi_{ij}^k(x,y)=\Phi^k\left(\frac{x-x_i}{h_i},\frac{y-y_j}{h_j}\right), \qquad k=1,2,3,4.$$

Пусть в области Ω задана дважды непрерывно дифференцируемая функция $U(x,y)$. Продолжим функцию U на все R^2 с сохранением класса и нормы. Затем в каждом узле $(x_i,y_j)\in R_h$ положим

$$U_{ij}=U(x_i,y_j),\ p_{ij}=h_i\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x_i,y_j)},\ q_{ij}=h_j\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(x_i,y_j)},\ r_{ij}=h_ih_j\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right|_{(x_i,y_j)}.$$

Эрмитово восполнение $U(x,y)$ в Ω_{ex}^h задается следующим образом:

$$\tilde U(x,y)=\sum_{(x_i,y_j)\in R_h}\left(U_{ij}\Phi_{ij}^1(x,y)+p_{ij}\Phi_{ij}^2(x,y)+q_{ij}\Phi_{ij}^3(x,y)+r_{ij}\Phi_{ij}^4(x,y)\right).$$

Из определения функций $\Phi_{ij}^k(x,y)$, $k=1,2,3,4$, следует, что функция $\tilde U(x,y)\in W_2^2(\Omega_{ex}^h)$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$\tilde U(x_i,y_j)=U_{ij},\ h_i\left.\frac{\partial\tilde U}{\partial x}\right|_{(x_i,y_j)}=p_{ij},\ h_j\left.\frac{\partial\tilde U}{\partial y}\right|_{(x_i,y_j)}=q_{ij},\ h_ih_j\left.\frac{\partial^2\tilde U}{\partial x\partial y}\right|_{(x_i,y_j)}=r_{ij}.$$

Множество функций $\tilde V(x,y)$, представимых в виде

$$\tilde V(x,y)=\sum_{(x_i,y_j)\in R_h}\left(V_{ij}\Phi_{ij}^1(x,y)+\alpha_{ij}\Phi_{ij}^2(x,y)+\beta_{ij}\Phi_{ij}^3(x,y)+\gamma_{ij}\Phi_{ij}^4(x,y)\right),$$

образует в $W_2^2(\Omega_{ex}^h)$ конечномерное подпространство. Обозначим его через H_h. Функции Φ_{ij}^k образуют в H_h базис. В работе [6] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если $U\in W_2^4(\Omega_{ex}^h)$, то для любой ячейки $\Pi_{ij}\in\Omega_{ex}^h$ справедлива оценка

$$\left\|U-\tilde U\right\|_{2,\Pi_{ij}}^2\le C(h_i^4+h_i^2h_j^2+h_j^4)\left\|U\right\|_{4,\Pi_{ij}}^2.$$

Теорема 2. Если $U(x,y)$ есть обобщенное решение задачи (1)–(2), имеющее вид (5), а $\tilde U(x,y)$ – эрмитово восполнение функции $U(x,y)$ в Ω_{ex}^h, то справедлива оценка

$$\left\|U-\tilde U\right\|_{2,\Omega_{ex}^h}^2\le Ch^4\left(\left\|w\right\|_{4,\Omega_{ex}^h}^2+\sum_n\left|\gamma_n\right|^2\right). \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть Ω_- – множество всех прямоугольников, имеющих одну или две стороны, равные h, и $\Pi=\Omega_{ex}^h\setminus\Omega_-$. Тогда

$$\left\|U-\tilde U\right\|_{2,\Omega_{ex}^h}^2=\left\|U-\tilde U\right\|_{2,\Omega_-}^2+\left\|U-\tilde U\right\|_{2,\Pi}^2.$$

Так как $\psi_n=0$ в Ω_-, то, учитывая теорему 1, получим

$$\left\| U-\tilde U \right\|^2_{2,\Omega_-} = \left\| w-\tilde w \right\|^2_{2,\Omega_-} \le C h^4 \left\| w \right\|^2_{4,\Omega_-} . \tag{15}$$

Предположим теперь, что $\Pi_{ij} \in \Pi$, но ни одна вершина прямоугольника Π_{ij} не совпадает с началом координат. Тогда

$$\left\| U-\tilde U \right\|^2_{2,\Pi_{ij}} \le C(h_i^4+h_j^4)\sum_{(4)}\int_{\Pi_{ij}}\left(\left|D^4 w\right|^2+\sum_{(n)}\gamma_n^2\left|D^4\psi_n\right|^2\right)dx\,dy \le$$

$$\le C(h_i^4+h_j^4)\left(\left\| w \right\|^2_{4,\Pi_{ij}} + \sum_{(n)}\sum_{(4)}\gamma_n^2\int_{\Pi_{ij}}\left|D^4\psi_n\right|^2 dx\,dy\right).$$

Так как в Π_{ij} имеем $\left|D^4\psi_n\right|^2 \le C r^{2(\lambda_n-4)} \le C\left((ih)^{\frac{2}{\alpha}}+(jh)^{\frac{2}{\alpha}}\right)^{\lambda_n-4}$, то с учетом (13) получим $\int\limits_{\Pi_{ij}}\left|D^4\psi_n\right|^2 dx\,dy \le C\left(i^{\frac{2}{\alpha}}+j^{\frac{2}{\alpha}}\right)^{\lambda_n-4} h^{\frac{2(\lambda_n-4)}{\alpha}} h^{\frac{2}{\alpha}} i^{\frac{1}{\alpha}-1} j^{\frac{1}{\alpha}-1}$.

Таким образом,

$$\left\|U-\tilde U\right\|^2_{2,\Pi_{ij}} \le C h^{\frac{4}{\alpha}}\left(\left\|w\right\|^2_{4,\Pi_{ij}} + \left(i^{\frac{4}{\alpha}-4}+j^{\frac{4}{\alpha}-4}\right)\sum_{(n)}\gamma_n^2\left(i^{\frac{2}{\alpha}}+j^{\frac{2}{\alpha}}\right)^{\lambda_n-4} i^{\frac{1}{\alpha}-1} j^{\frac{1}{\alpha}-1} h^{\frac{2(\lambda_n-3)}{\alpha}}\right). \tag{16}$$

Пусть Π_0 есть один из тех квадратов множества Π, одна из вершин которых совпадает с началом координат. Тогда по теореме 1 имеем

$$\left\| w-\tilde w \right\|^2_{2,\Pi_0} \le C h^{\frac{4}{\alpha}} \left\| w \right\|^2_{4,\Pi_0},$$

$$\left\|\psi_n\right\|^2_{2,\Pi_0} \le C\int_0^{h^{\frac{\sqrt2}{\alpha}}} r^{2(\lambda_n-2)} r\,dr \le C h^{\frac{2(\lambda_n-1)}{\alpha}}, \quad \left\|\tilde\psi_n\right\|^2_{2,\Pi_0} \le C h^{\frac{2(\lambda_n-1)}{\alpha}}.$$

Тем самым

$$\left\| U-\tilde U \right\|^2_{2,\Pi_0} \le C h^{\frac{4}{\alpha}} \left\| w \right\|^2_{4,\Pi_0} + \sum_{(n)}\gamma_n^2 h^{\frac{2(\lambda_n-1)}{\alpha}} . \tag{17}$$

Суммируя неравенства (16) и (17) для всех $\Pi_{ij} \in \Pi$, приходим к неравенству

$$\left\| U-\tilde U \right\|^2_{2,\Pi} \le C h^4 \left\| w \right\|^2_{4,\Pi} + \sum_{(n)}\gamma_n^2 h^{\frac{2(\lambda_n-1)}{\alpha}}(1+S), \text{ где}$$

$$S=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(i^{\frac{2}{\alpha}}+j^{\frac{2}{\alpha}}\right)^{\lambda_n-4} i^{\frac{1}{\alpha}-1} j^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(i^{\frac{4}{\alpha}-4}+j^{\frac{4}{\alpha}-4}\right) \le$$

$$\le C\int_0^N\int_0^N\left(\xi^{\frac{2}{\alpha}}+\eta^{\frac{2}{\alpha}}\right)^{\lambda_n-4}\xi^{\frac{1}{\alpha}-1}\eta^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(\xi^{\frac{4}{\alpha}-4}+\eta^{\frac{4}{\alpha}-4}\right)d\xi\,d\eta.$$

Переходя к полярной системе координат (r,θ) и расширяя область интегрирования, получим

$$S \le C \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{0}^{N\sqrt{2}} r^{\frac{2(\lambda_n-4)}{\alpha}} r^{\frac{2}{\alpha}-2} r^{\frac{4}{\alpha}-4} r\,dr \le C h^{4-\frac{2(\lambda_n-1)}{\alpha}}$$

(заметим, что $N\sqrt{2}=O(h^{-1})$). Поскольку при $\alpha<\dfrac{\min\lambda_n-1}{2}$ последний интеграл сходится, то

$$\left\|U-\tilde{U}\right\|_{2,\Pi}^{2} \le C h^4\left(\left\|w\right\|_{4,\Pi}^{2}+\sum_{(n)}\gamma_n^2\right). \tag{18}$$

Складывая почленно неравенства (15), (18), получим утверждение теоремы 2.

5. Построение ВРС и оценка скорости сходимости. Напомним, что обобщенным решением задачи (1)–(2) мы назвали функцию $U\in \overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$, удовлетворяющую тождеству

$$L_\Omega(U,\Phi)=\int_\Omega f\,\Phi\,d\Omega \qquad \forall\Phi\in \overset{0}{W}{}_2^2(\Omega). \tag{19}$$

Приближенным решением задачи (1)–(2) назовем функцию $\tilde{V}\in H_h$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$L_\Omega(\tilde{V},\tilde{\Phi})=\int_\Omega f\,\tilde{\Phi}\,d\Omega \qquad \forall\tilde{\Phi}\in H_h. \tag{20}$$

Систему сеточных уравнений для нахождения параметров, определяющих $\tilde{V}$, запишем в виде $L_\Omega(\tilde{V},\Phi_{ij}^k)=\int_\Omega f\,\Phi_{ij}^k\,dx\,dy$, где Φ_{ij}^k ($k=1,2,3,4$) – базисные функции эрмитова восполнения, отвечающие произвольному узлу (x_i,y_j) из R_h. Если вместо Φ в тождестве (19) возьмем произвольную функцию $\tilde{\Phi}\in H_h$, то из (19) и (20) получим

$$L(U-\tilde{V},\tilde{\Phi})=0.$$

Полагая в последнем равенстве $\tilde{\Phi}=\tilde{U}-\tilde{V}$, после несложных преобразований получим

$$L_\Omega(U-\tilde{V},U-\tilde{V})=L_\Omega(U-\tilde{V},U-\tilde{U}). \tag{21}$$

По неравенству Коши–Буняковского, правая часть последнего равенства оценивается следующим образом:

$$L_\Omega(U-\tilde{V},U-\tilde{U})\le C\left\|U-\tilde{V}\right\|_{2,\Omega}\left\|U-\tilde{U}\right\|_{2,\Omega}. \tag{22}$$

Применяя к левой части неравенство (4), получим

$$L_\Omega(U-\tilde{V},U-\tilde{V})\ge C\left\|U-\tilde{V}\right\|_{2,\Omega}^{2}. \tag{23}$$

Из равенства (21) и неравенств (22), (23) получим

$$\left\|U-\tilde{V}\right\|_{2,\Omega}\le C\left\|U-\tilde{U}\right\|_{2,\Omega}.$$

Отсюда с учетом оценки (14) следует, что

$$\left\|U-\tilde{V}\right\|_{2,\Omega}^{2} \le Ch^{4}\left(\|w\|_{4,\Omega_{\varepsilon}^{h}}^{2}+\sum_{(n)}\gamma_{n}^{2}\right) \le Ch^{4}\|f\|_{0,\Omega}^{2}.$$

Кафедра математических методов и моделирования *Поступила 06.07.2005*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Оганесян Л.А., Руховец Л.А.** Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ер.: Изд-во АН Арм. ССР, 1979.
2. **Кондратьев В.А.** – Тр. Моск. матем. общ-ва, 1967, т. 16, с. 285–290.
3. **Оганесян Л.А.** – ЖВММФ, 1972, т. 12, № 5.
4. **Оганесян Л.А., Зунделевич С.В.** – ЖВММФ, 1975, т. 15, №2.
5. **Дадаян Ю.Г., Оганесян Л.А.** – ДАН Арм. ССР, 1980, т. LXXI, № 5, с. 275–281.
6. **Дадаян Ю.Г.** Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ер.: Изд-во «Гитутюн» НАН РА, 2005, с. 180–186.

Յու. Գ. ԴԱԴԱՅԱՆ

ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ-ՏԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՍԽԵՄԱՆԵՐ ԲԻՀԱՐՄՈՆԻԿ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԸՍՏ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ԽՏԱՑՎՈՂ ՑԱՆՑՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է բիհարմոնիկ հավասարման համար առաջին եզրային խնդրի լուծման վարքի ուսումնասիրությանը անկյունային կետերի շրջակայքում: Ապացուցված է, որ դիտարկված խնդրի ընդհանրացված լուծումը կարելի է ներկայացնել այնպիսի տեսքով, որը հնարավորություն կ տա կառուցել վարիացիոն-տարբերական սխեմա ոչ կանոնավոր ցանցում: Զուգամիտության արագության համար ստացված են ըստ կարգի սահմանային գնահատականներ:

Yu. G. DADAYAN

VARIATION-DIFFERENCE SCHEMES ON COORDINATE CONDENSED GRIDS FOR BIHARMONIK EQUATION

Summary

The paper is devoted to the study of behavior of the solution of first boundary problem for biharmonik equation in the neighborhood of angular point. It is proved that the solution of the problem can be represented in a certain form which allows constructing variation-difference schemes on non-regular grids. Exact estimations for convergence rate are obtained.