Математика

УДК 519.21

Э. А. ДАНИЕЛЯН, А. А. ДАНИЕЛЯН, И. Э. ДАНИЕЛЯН

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ОЧЕРЕДЕЙ В МОДЕЛЯХ С ОЖИДАНИЕМ

Настоящая работа представляет собой краткое изложение результатов и методов теории очередей в моделях с ожиданием. Очереди, в зависимости от постановок задач и методов, относят к объекту анализа исследования операций или теории вероятностей. Охарактеризованы основные направления и основополагающие результаты в многоканальных моделях с ожиданием, где в первую очередь рассматриваются эталонная модель $GI \mid G \mid s \mid \infty$, $s \geq 2$, и ее частный случай $M \mid G \mid s \mid \infty$. Поскольку при $s \geq 2$ точные формулы немногочисленны, то внимание сконцентрировано на случае $s = 1$.

Математическая теория модели $GI \mid G \mid 1 \mid \infty$ (FIFO) допускает систематическое изложение. Здесь помимо точных результатов приводятся важнейшие предельные теоремы, законы сохранения, экстремальные теоремы для основных характеристик. Работа содержит также некоторые результаты, полученные авторами: формулу Литтля при новых предположениях в модели $GI \mid G \mid 1 \mid \infty$, предельную теорему для времен ожидания при загрузке, превосходящей единицу и т.д.

§1. ЧТО ТАКОЕ ТЕОРИЯ ОЧЕРЕДЕЙ?

1.1. *Теория очередей – раздел исследования операций.* Модели очередей описывают поведение сложных систем. Их анализ необходим при проектировании информационных сетей, таких как интернет-сети, автоматизированные вычислительные комплексы, системы снабжения и т.д. Очереди возникают всюду, где клиенты, требования, вызовы выстраиваются в очередь для приобретения услуг (обслуживания). Их обслуживают приборы, осуществляющие «массовую» обработку информации при учете сопутствующих случайных факторов. Очереди – объект исследования **теории очередей** (теории массового обслуживания). Л. Клейнрок [1] определяет модели очередей как класс систем, в которых клиенты конкурируют за доступ к ограниченным ресурсам. «Применение теории очередей для анализа распределения ресурсов и решения задач о потоках данных в вычислительных системах является, по-видимому, единственным доступным специалистам по вычислительной технике методом, позволяющим понять сложные связи в таких системах».

Практические задачи, приводящие к моделям очередей, – **оптимизационные**. Это проявилось на этапе первичного развития теории, на который большое влияние оказал А.К. Эрланг (1878–1929), сотрудник Копенгагенской телефонной компании. Модели очередей в области связи сформировали **теорию телетрафика** [2–4]. Значительное влияние на это инженерно-математическое направление оказали Г.П. Башарин и его ученики (П.П. Бочаров, В.А. Кокотушкин, Д.Г. Михалев, В.Т. Лысенкова), а также М.А. Шнепс. Оптимизационные задачи очередей формулируются на основе **критериев потерь**. Этим теория очередей включается в **исследование операций** [5, 6]. Помимо теории телетрафика к исследованию операций относят модели очередей, уделяющие внимание оптимальному распределению и упорядочению потоков по критериям потерь. Такие модели формируют **теорию расписаний** [7, 8]. В этих направлениях наблюдается усложнение **структур** моделей.

Оптимизационные задачи в моделях очередей, как правило, решают в условиях стационарного режима, что предполагает предварительное получение: 1) условий существования стационарных характеристик; 2) формул для нестационарных характеристик (в момент t); 3) формул для стационарных характеристик из формул для нестационарных при $t \to \infty$.

Таков стандартный путь. Не исключены и другие. Таким образом, в моделях очередей до решения оптимизационной задачи следует пройти ряд **этапов**. В этом отличие теории очередей от других разделов исследования операций (теория игр, теория информации и кодирования и т.д.).

1.2. *Теория очередей – вероятностное направление.* Учет **случайных** факторов в практических задачах, приводящих к моделям очередей, обуславливает применение стохастических методов, относит модели очередей к разделу **теории вероятностей** [9, 10]. Ее исключительная роль при анализе очередей вызвана наличием этапов 1–3. Каждый из них в связи с разнообразием моделей выдвигает вероятностные проблемы, решение которых вместе с задачами оптимизации и составляет содержание **теории очередей**, которая как раздел теории вероятностей выделяет структурно-простые модели. Для таких **эталонных** моделей используют классификацию Д.Дж.Кендалла [11]. В соответствии с ней модель представляют в виде $a|b|c|d$, где символы a и b относят к поступающему потоку и длительности обслуживания соответственно, символ c определяет число приборов, а d – число мест для ожидания. В рамках классификации в центре внимания теории находится **эталонная** модель

$$GI|G|s|\infty \qquad (1.2.1)$$

с **рекуррентным** потоком и **общим** распределением времен обслуживания вызовов и ее частные случаи. А именно, при $a = M$ поток пуассоновский, а при $b = M$ обслуживание имеет **экспоненциальную функцию распределения** (ФР). На первой фазе развития предполагали, что входящие потоки пуассоновские, а времена обслуживания имеют показательную ФР. Тогда **случайные процессы** характеристик **марковские** независимо от структурной сложности модели. Они допускают сведение к **процессам размножения и гибели**. Выписываются уравнения состояний, условия существования стационарного режима и стационарные распределения. Сложности возникают при получении расчетных формул для **нестационарных**, а иногда и **стацио-**

нарных характеристик структурно-сложных моделей [10–12]. Однако при наличии уравнений состояний возможно приближенное или машинное решение задач. Поэтому нет необходимости выделения эталонных моделей.

Требования одновременной показательности времен обслуживания и пуассоновости потоков сужают возможности применения моделей к реальным системам. Первое требование ограничительно для реальных систем, но второе часто подтверждается статистически для реальных потоков и служит в ряде схем суммирования случайных величин (СВ) предельным законом (А.Я. Хинчин, Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, А. Реньи, Б.И. Григелионис, Г.А. Осоков, Ю.К. Беляев). Отметим процедуру (схему) просеивания потоков [13, 14].

Первый этап математической и, частично, инженерной теории очередей исчерпал себя. Интерес математиков к нему невелик. Отказ от приведенных требований привел к новым методам анализа, в первую очередь для эталонной модели (1.2.1). Переход к немарковским моделям отражен в монографиях [13–21].

§2. МНОГОКАНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ С ОЖИДАНИЕМ

2.1. *Модель $GI|G|s|\infty$ при $s \geq 2$. Общий случай.* Основные закономерности очередей проявляются в модели $GI|G|s|\infty$. Однако нахождение точных формул в многоканальных моделях с ожиданием в общем случае сложная и, за редким исключением, нерешенная проблема. Существенен результат о формуле связи актуальных времен ожидания (ВО) Дж. Кифера и Дж. Вольфовитца [22] в модели $GI|G|s|\infty$ с дисциплиной FIFO (first in–first out). А именно, пусть входящий рекуррентный поток вызовов задан ФР $A(x) = P(u_n < x)$, где P – знак вероятности и u_n – длина промежутка между поступлениями в модель $(n-1)$-го и n-го вызовов. Обозначим через B ФР СВ v_n, где v_n – время обслуживания n-го вызова. $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ – не зависящие друг от друга последовательности независимых одинаково распределенных (НОР) СВ.

Пусть w_n – ВО начала обслуживания n-го вызова, $n = 1,2,...$, $w_0 = 0$, а $w_{n,l}$ – СВ с момента $t_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ до момента освобождения l-го прибора от вызовов, поступивших в модель раньше t_n. Приборы перенумерованы числами $1,2,...,s$. Таким образом, $w_n = \min\limits_{1 \leq i \leq s} w_{n,i}$, $n = 1,2,...$ Запишем формулу связи при $n = 1,2,...$ и $i = 1,2,...,s$:

$$w_{n,i} = \max(0, w_{n-1,i} + v_{n-1,i} - u_n), \qquad (2.1.1)$$

где $v_{n,i} = \begin{cases} v_n, & w_n = w_{n,i}, \\ 0, & w < w_{n,i}, \end{cases}$ если среди $w_{n,i}$, $i = 1,2,...,s$, лишь одно минимально. Иначе, выбираем i с минимальным номером.

Теорема Кифера и Вольфовитца. *Пусть $\alpha_1 = Mu_n < +\infty$, $\beta_1 = Mv_n < +\infty$, $\rho = \beta_1/\alpha_1$, где M – знак математического ожидания. Тогда: 1) если $\rho < s$, то для $\{w_n\}$ существует стационарная ФР, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} P(w_n < x) = P(w < x)$,*

$x \in R^+$, $P(w<+\infty)=1$; *2) если* $\rho > s$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} P(w_n < x) = 0$ *при* $x \in R^+$.

В теореме приведен результат и для случая $\rho = s$.

Существованию предельных ФР характеристик модели $GI|G|s|\infty$ при неограниченном росте времени посвящена и работа [23]. Формула (2.1.1) в случае $s=1$ сводится к **основному** уравнению модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO)

$$w_n = \max(0, w_{n-1} + v_{n-1} + u_n),\ n = 1,2,\dots, \tag{2.1.2}$$

источнику многих следствий. В 1961г. Ф.Поллячек [24] установил для актуальных ВО на базе уравнений (2.1.1) систему интегральных уравнений. Его результаты обобщил Дж. Де Смит [25, 26]. Продвижение здесь связано со сложностями и вызывает интерес [25–28]. Одно из направлений анализа – поиск вложенных процессов восстановления в процессах характеристик модели [28]. Не обойдена и возможность имитационного моделирования уравнения (2.1.1) [29], но в критической ситуации. В теореме Кифера и Вольфовитца видна общая **закономерность** очередей с ожиданием. А именно, СВ w_n, $n=1,2,\dots$, есть **невыполненная работа** (обслуживание) в момент t_n. За единицу времени s приборов справляются с s единицами работы. В модель в единицу времени в среднем поступает $1/\alpha_1$ вызовов, привносящих в среднем $\rho = (\beta_1/\alpha_1)$ единиц работы. При $\rho < s$ приборы справляются с поступающей работой. При $\rho > s$ за единицу времени в модели в среднем скапливается $\rho - s$ единиц невыполненной работы, которая с ростом времени неограниченно растет. Случай $\rho = s$ (или ρ близко к s) требует тонкого анализа из-за флюктуаций, вызванных случайными факторами. Все три случая в модели $GI|G|s|\infty$ допускают при неограниченном росте времени асимптотический анализ.

В теории очередей действуют законы сохранения невыполненной работы, длины очереди (ДО), периодов занятости (ПЗ), формулы Литтля и т.д. К общим закономерностям относят формулы Литтля связи стационарных ДО и ВО. В модели $GI|G|s|\infty$ (FIFO) при $\rho < s$ действует в терминах средних следующая формула Литтля:

$$L = \lambda W, \tag{2.1.3}$$

где W и L – стационарные средние ВО и ДО соответственно и $\lambda = (1/\alpha_1)$. Формулы Литтля справедливы и в терминах СВ. В общей модели, включающей $GI|G|s|\infty$, обозначим через w_n ВО n-го вызова, через $N(t)$ – число поступивших вызовов в модель за $[0,t)$, через $\xi(t)$ – число вызовов в очереди в момент t. Модель изучена в [30, 31], где в предположении существования с вероятностью 1 пределов $\xi = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \xi(u)du$, $a = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}$, $w = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_n$ и при $a<+\infty$, $w<+\infty$ доказана формула Литтля:

$$\xi = aw \text{ с вероятностью 1.} \tag{2.1.4}$$

Из (2.1.4) можно вывести (2.1.3).

И сейчас интерес к формулам Литтля значителен [32, 33]. У специалистов крепнет убеждение, что в общем случае модели $GI|G|s|\infty$, $s>2$, **невозможно** получение точных формул для нестационарных (возможно и многих стационарных) характеристик в замкнутой форме. Выход – в постулировании ФР ПЗ в качестве новой специальной функции, в ее табулировании и анализе других характеристик на ее основе (ПЗ – промежуток времени, начинающийся с поступления вызова в свободную от вызовов модель и завершающийся первым после этого моментом освобождения модели от вызовов.)

2.2. *Модель $GI|G|s|\infty$ при $s\ge 2$ с фазовым поступлением.* Простые следствия из немногочисленных точных формул для модели $GI|G|s|\infty$ при $s\ge 2$ – редкость. Приведем одно из них, вытекающее из формулы Литтля (2.1.3). В модели $GI|G|s|\infty$ при $\rho<s$ обозначим: $N(t)$ и $M(t)$ – количества поступивших и обслуженных за $[0,t)$ вызовов, $S(t)$ и $I(t)$ – суммарные времена обслуживания и простоя приборов за $[0,t)$ соответственно. По теории восстановления [34]

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{N(t)}{t}=a \quad \text{с вероятностью } 1. \qquad (2.2.1)$$

По усиленному закону больших чисел (УЗБЧ) запишем равенство

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{M(t)}=\beta_1 \quad \text{с вероятностью } 1. \qquad (2.2.2)$$

Пусть $P(u_1>v_1)>0$. Тогда поскольку при $\rho<s$ попадание в пустое состояние есть «рекуррентное событие» [35], то, согласно [28],

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{N(t)}{M(t)}=1 \quad \text{с вероятностью } 1. \qquad (2.2.3)$$

Далее очевидно, что

$$I(t)+S(t)=ts, \quad t\in R^+, \qquad (2.2.4)$$

и по УЗБЧ

$$m=\lim_{t\to+\infty}\frac{I(t)}{t}, \qquad (2.2.5)$$

где m – среднее стационарное число свободных приборов. Теперь из (2.2.1)–(2.2.5) получаем $m=s(1-\rho)$.

При $s\ge 2$ в модели $GI|G|s|\infty$ один из путей преодоления сложностей – аппроксимация обслуживания смесью гиперэрланговских ФР, т.е. переход к фазовому обслуживанию [36]. Для применения предпочтительна аппроксимация входящего потока. Такой подход в случае одного прибора с приоритетными дисциплинами развит В.Г. Ушаковым [37]. Отметим также работы [38, 39]. Обоснованием подхода служит §8, гл. 4 из [40]. Однако возникает проблема устойчивости – близости значений характеристик при близости соответствующих потоков и времен обслуживания в моделях с фазовыми поступлением и обслуживанием и без них. Проблемы устойчивости возникают и в общих ситуациях. В случае одной фазы приходим к модели $M|G|s|\infty$. Но и здесь при $s\ge 2$ продвижение в нахождении точных формул наблюдается лишь при $s=2$. Попытка анализа Дж. Коэна и О. Боксмы (см. [41], гл. 4) основана на двумерных случайных блужданиях, использует краевые задачи Римана и Римана–Гильберта. Отметим также статьи [42–45]. Подход бесперспективен при $s>2$, и поэтому обоснована аппроксимация искомых характеристик. Такая попытка с использованием рекурсивной схемы, основанной на теории регенерирующих процессов [35], для аппроксимации стационарных вероятностей состояний и ВО сделана в [46, 47] (итоги подведены в монографии [48]).

2.3. *Асимптотические методы.* Понятие «асимптотические методы очередей» требует уточнения. При широком толковании к ним относят эргодические теоремы, нахождение ФР и сходимость к стационарным ФР, задачи устойчивости. Под асимптотическими методами мы понимаем [49]:

1. Анализ точных формул или уравнений, описывающих ФР характеристик, при неограниченном сближении модели со своим критическим состоянием.

2. Анализ поведения случайных процессов, характеризующих модель в критическом состоянии, их сходимость к диффузионным процессам.

3. Теоремы устойчивости.

Выделим простую критическую ситуацию – быстрое обслуживание вызовов. Дуальной к ней ситуацией считают редкое поступление вызовов. Вместе их называют ситуацией «малой» загрузки.

В рамках направления 1 результаты анализа двухканальных моделей с ожиданием и общей ФР времен обслуживания, в которых входящий поток формируется вызовами из нескольких источников, упрощены в [50]. Анализ основан на интегральных уравнениях из [42, 51–53] для случая быстрого обслуживания. Однако здесь предпочтителен метод «монотонной траектории» А. Д. Соловьева и Д.Б. Гнеденко [54, 55], не требующий точных формул для изучаемых характеристик. Метод на моделях очередей уточнен, например, в [56, 57]. Другой простой случай критической ситуации – неограниченный рост числа приборов [49].

Асимптотический анализ модели $GI|G|s|\infty$ возможен в условиях **критической загрузки.** Термин введен Дж.Ф. Кингманом для ситуации, когда загрузка модели $\rho \ge s$ и фиксирована. При этом модель нестабильна, а именно, ДО, ВО и т.д. с течением времени неограниченно растут (при $\rho=s$ исключен детерминированный случай). Возникает задача определения скорости роста характеристик модели. Увеличивается количество публикаций по очередям с ожиданием в условиях критической загрузки [15, 19, 21, 58–65]. Ныне термин **критическая загрузка** используется в случае последовательности моделей $GI|G|s|\infty$ с загрузками $\rho_n \to s$. При фиксированных загрузках и $s=1$ говорят о единичной загрузке ($\rho=1$) и о загрузке больше единицы ($\rho>1$).

В направлении 1 первые результаты получены Дж. Кингманом [62, 63] на базе (2.1.2). Можно назвать еще ряд работ [13, 15, 60, 61, 64–66], подмеченные закономерности в которых справедливы в общих условиях отсутствия точных формул. На сегодня случаи «явной разрешимости» моделей очередей исчерпаны, поэтому актуален поиск методов асимптотического анализа, не основанных на точных формулах. В направлении 1 отметим два метода. Первый начинается с уравнения (2.1.1) (или (2.1.2)) и приводит к последовательности частичных сумм НОР СВ. Метод развит в [62, 64], в работе Ю.В. Прохорова [67] и обсуждался в [68]. Второй метод инициирован А.А. Боровковым [69] и, в меньшей общности, У. Уиттом [68]. Он начинается с процесса ДО, что связывается с процессами восстановления. При этом лишь малое число публикаций посвящено многоканальным моделям [69, 70].

Цель направления 2 – установление общих теорем теории вероятностей (центральная предельная теорема (ЦПТ), законы больших чисел (ЗБЧ) и повторного логарифма (ЗПЛ), большие уклонения и т.д.) для процессов характеристик очередей с ожиданием. Стимулом послужила работа Ю.В. Прохорова [67], в которой показано, что переходные явления в очередях имеют в основе **принцип инвариантности** Донскера–Прохорова. Он позволяет с помощью винеровского процесса аппроксимировать случайные процессы характеристик очередей. Методы анализа используют теоремы слабой сходимости для процессов и приводят к **функциональным** предельным теоремам [68, 71–77]. Исследования Д.Л. Иглегардта, А.А. Боровкова и др. в 70-ые годы по диффузионной аппроксимации случайных процессов в многоканальных моделях включены в монографии по теории очередей (см., напр., [49]). Суть техники доказательства функциональных предельных теорем методом слабой сходимости изложена в монографии П. Биллингсли [78].

Направление 3 (теоремы устойчивости), в отличие от 2, носит не собирательный характер общих закономерностей теории вероятностей в моделях очередей, а индивидуальный. Оно, в первую очередь, связано с В.В. Калашниковым, предложившим **метод пробных функций** для анализа **устойчивости** марковских процессов, который развивает метод устойчивости Ляпунова [79]. В.В. Калашников и его ученики изучали марковские процесссы, в частности возникающие в моделях очередей [80–86]. Проблематика подхвачена В.В. Золотаревым, предложившим **вероятностный** метод анализа устойчивости [87–89], который основан на метрическом подходе. П. Франкен [90] к задачам устойчивости очередей подходит с точки зрения точечных процессов. Иной вероятностный подход – **метод обновлений** – предложен А.А. Боровковым [15]. Естественность метода – в его применимости при минимальных предположениях в **эталонных** моделях и в возможности получения оценок **скоростей сходимости** в предельных теоремах [49]. В частности, в модели $GI|G|s|\infty$ при $\rho > s$ для ВО и ДО действует ЦПТ. При оценке скорости сходимости в ЦПТ применимы классические методы суммирования независимых СВ [91]. В модели $GI|G|s|\infty$ уже получены **границы Берри–Эссеена** скорости сходимости в ЦПТ [92–94].

§3. ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ В МОДЕЛИ $GI|G|1|\infty$

3.1. *Эталонная модель* $GI|G|1|\infty$. Приобрела очертания **математическая теория** структурно-простой модели $G|G|1|\infty$ (FIFO). Неасимптотическая математическая теория модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) допускает строгое изложение. Основанием служат теории восстановления, случайных блужданий, марковских процессов, процессов с независимыми приращениями, комбинаторные методы. Опубликованы излагающие эту теорию монографии как энциклопедического характера, которые эклектически вобрали в себя много результатов и использовали различные методы анализа (см., напр., Дж.В. Коэн [95]), так и ограничившие себя использованием одного подхода (см., напр., Н.У. Прабху [21]). Анализ модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) составляет содержание глав монографий по моделям очередей (см. [13, 15, 17, 20]) и случайным процессам (см. [19]).

Опишем модель $GI|G|1|\infty$. В одноканальную систему обслуживания с ожиданием в случайные моменты времени $\{t_n\}$, где $0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots$, поступают одиночные вызовы, перенумерованные в порядке поступления числами 1,2,... Пусть v_n, $n \ge 1$, – время обслуживания n-го вызова и $u_n = t_n - t_{n-1}$, $t_0 = 0$. Последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ неотрицательных СВ определены на вероятностном пространстве (Ω, F, P). $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ независимы друг от друга и образуют соответственно последовательности НОР СВ с ФР A и B на $[0, +\infty)$. В момент 0 модель свободна. Приняты следующие **предположения**:

1) $A(+0) = 0$, $B(+0) = 0$. Условие $A(+0) = 0$ влечет $P(0 < t_1 < t_2 < \ldots) = 1$. Условие $B(+0) = 0$ означает, что вероятность мгновенного обслуживания равна 0;

2) $0 < \alpha_1 = Mu_1 < +\infty$, $0 < \beta_1 = Mv_1 < +\infty$. Тогда **загрузка** $\rho = (\beta_1/\alpha_1) \in R^+$;

3) из рассмотрения исключен случай $P(u_1 = \alpha_1) = P(v_1 = \beta_1) = 1$.

К основным характеристикам модели относят:

1. $w_n, n \ge 1$, и $w(t), t \ge 0$, – невыполненные работы в моменты t_n и t соответственно. Они интерпретируются при дисциплине FIFO как актуальное ВО начала обслуживания n-го вызова и как виртуальное ВО в момент t соответственно (виртуальное ВО в момент t есть время, которое пришлось бы ждать вызову до начала обслуживания, если бы он поступил в модель в момент t).

2. $\zeta_n, n \ge 1$, и $\zeta(t)$, $t \ge 0$, – длины очередей в моменты $t_n - 0$ и t соответственно.

3. I_n, $n \ge 1$, и $I(t), t \ge 0$, – суммарные простои прибора за промежутки $[0, t_n)$ и $[0, t)$ соответственно.

4. $\xi(x), x > 0$, – ПЗ с задержкой x, определяется как промежуток времени, начинающийся с задержки x, в начале которой вызовы в модели отсутствуют, и завершающийся в первый момент освобождения модели от вызовов после задержки.

ВО и ДО зависят от дисциплины. ПЗ и простои прибора инвариантны в классе **консервативных** дисциплин (дисциплина консервативна, если внутри модели **работа** не создается и не исчезает, а лишь привносится в модель извне). Примеры консервативных дисциплин – FIFO и LIFO (last in–first out).

Модель $GI|G|1|\infty$(FIFO) изучена различными методами. Литература по ней необъятна. На наш взгляд, наиболее интересны по методам и результатам монографии [1, 15, 17, 95, 96].

В модели $M|G|1|\infty$, частном случае модели $GI|G|1|\infty$ при

$$A(x)=\begin{cases}1-\exp(-\frac{1}{\alpha_1}x) & \text{при } x\ge 0,\\ 0 & \text{при } x\le 0,\end{cases}$$

из-за марковского свойства экспоненциальной ФР применимы специфические методы анализа. Марковское свойство ФР A означает, что для любых $x>0$ и $y>0$ справедливо равенство $P(u_n\ge x+y/u_n\ge y)=P(u_n\ge x)=$ $=\exp(-\frac{1}{\alpha_1}x)$, где $P(C/D)$ – условная вероятность события C при условии осуществления события D.

3.2. *Уравнения связи* (см. [15, 17, 96]). Обозначим: $X_n=v_n-u_{n+1}$, $S_n=X_1+X_2+...+X_n$ при $n\ge 1$, $S_0=0$. Помимо **основного уравнения** (2.1.2) модели $GI|G|1|\infty$, которое в терминах ФР имеет решение

$$P(w_{n+1}<x)=P(\max_{0\le k\le n}S_k<x)\,,\ x\in R^+\,, \tag{3.2.1}$$

справедлива формула связи, определяющая последовательность $\{I_n\}$,

$$I_n-I_1=w_n-S_{n-1},\ n\ge 2\,,\ I_1=t_1. \tag{3.2.2.}$$

Пусть η_n ,$n\ge 1$, есть число вызовов в модели в момент t_n-0. Тогда

$$\eta_n=\zeta_n-1 \text{ при } \zeta_n\ge 1 \text{ и } \eta_n=\zeta_n\ (=0) \text{ при } \eta_n=0\,. \tag{3.2.3}$$

ФР последовательностей $\{\eta_n\}$ и $\{\zeta_n\}$ в силу (3.2.3), (3.2.1) определяются формулами связи: при целых $n>k\ge 1$

$$P(\eta_k>k)=\int_0^\infty P(w_{n-k}>t)dA^{k*}(t)\,, \tag{3.2.4}$$

где $*$ – знак свертки, A^{k*} – k-кратная свертка A с собой. Для различных ПЗ, в частности для $\xi(x)$, найдены уравнения в терминах траекторий [96]. Один из путей анализа характеристик с **непрерывным** временем заключается в нахождении формул связи с характеристиками, зависящими от дискретного времени.

Пусть $N(t)$, $t\ge 0$, – число поступивших за $[0,t)$ в модель вызовов, $\gamma(t)=t-t_{N(t)}$. Из теории восстановления известно, что

$$P(N(t)=n)=A^{n*}(t)-A^{n+1*}(t)\ ,n\ge 0\ ,t>0\ ,\ A^{0*}=1\,, \tag{3.2.5}$$

$$P(\gamma(t)\ge x)=\int_0^t(1-A(t+x-u))dH(u)\,,\ x\in R^+\,, \tag{3.2.6}$$

где H – функция восстановления, $H(t)=\sum_{n\ge 0}A^{n*}(t)$. Перейдем к формулам связи. При $N(t)>0$

$$w(t)=\max(0,w_{N(t)}+v_{N(t)}-\gamma(t))\,,\ t>0\,, \tag{3.2.7}$$

где СВ $w_{N(t)}$ и $v_{N(t)}$ **независимы**. Однако СВ $w_{N(t)}$ и $\gamma(t)$, вообще говоря,

зависимы, что создает сложности для анализа $w(t)$ при $t \to +\infty$. Непрерывный аналог формулы (3.2.2) имеет вид

$$t + w(t) = I(t) + V_{N(t)}, \quad t > 0, \tag{3.2.8}$$

откуда в силу (3.2.7) находится $I(t)$. Здесь $V_{N(t)} = v_1 + v_2 + \cdots + v_{N(t)}$, $t > 0$, где $\{v_n\}$ и $N(t)$ **независимы.**

Пусть $\delta(t) = 0$, если в момент t прибор свободен, и $\delta(t)$ равно времени от t до момента завершения обслуживания вызова, находящегося на приборе, в противном случае. Очевидно,

$$\delta(t) = \gamma(t - I(t)), \text{ если в момент } t \text{ прибор занят и } t \geq 0. \tag{3.2.9}$$

При $t \geq 0$ запишем равенство для траекторий

$$w(t) = \delta(t) + v_1 + v_2 + \cdots + v_{\eta(t)}, \tag{3.2.10}$$

где $\{v_n\}$ и $\eta(t)$ **независимы**. Отметим, что $\zeta(t) = \eta(t)$, если в момент t прибор свободен, и $\zeta(t) = \eta(t) + 1$ в противном случае.

Формулы (3.2.1)–(3.2.10) допускают анализ характеристик модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO).

3.3. *Предельные ФР характеристик.* В литературе по теории очередей различными методами, в частности с использованием формул связи, устанавливают предельные ФР характеристик модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) с **непрерывным или дискретным** временем. А именно, существуют **слабые** пределы при $n \to \infty$

$$w_n \Rightarrow w, \quad \zeta_n \Rightarrow \zeta, \quad I_n \Rightarrow I \tag{3.3.1}$$

и $w(t) \Rightarrow w^*$, $\zeta(t) \Rightarrow \zeta^*$, $I(t) \Rightarrow I^*$ при $t \to +\infty$, где $\Rightarrow$ – знак слабой сходимости. Пусть $W_n, \hat{I}_n, W_t^*, \hat{I}_t$ – ФР СВ w_n, I_n, $w(t)$, $I(t)$, а $\{p_m(n)\}, \{p_m(t)\}$ – распределения СВ $\zeta_n, \zeta(t)$ соответственно. Предельные ФР и распределения (собственные или несобственные) соответственно обозначим через W, $\hat{I}$, W^*, I^* и $\{p_n\}, \{p_n^*\}$. Тогда справедливы следующие соотношения (см. [96]):

$$W(+\infty) = W^*(+\infty) = 1 - \hat{I}(+\infty) = 1 - I^*(+\infty) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \rho < 1, \\ 0 & \text{при} \quad \rho \geq 1; \end{cases} \tag{3.3.2}$$

$$\sum_{m \geq 0} p_m \begin{cases} = 1 & \text{при } \rho < 1, \\ < 1 & \text{при } \rho \geq 1, \end{cases} \qquad \sum_{m \geq 0} p_m^* \begin{cases} = 1 & \text{при } \rho < 1, \\ < 1 & \text{при } \rho \geq 1. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Качественное поведение модели характеризуется и с помощью ФР $\Pi_y(x) = P(\xi(y) < x)$. А именно,

$$\Pi_y(+\infty) \begin{cases} = 1 & \text{при} \quad \rho \leq 1, \\ < 1 & \text{при} \quad \rho > 1, \end{cases} \quad \pi_1(y) = \int_0^{+\infty} x\, d\Pi_y(x) \begin{cases} < +\infty & \text{при} \quad \rho < 1, \\ = +\infty & \text{при} \quad \rho \geq 1. \end{cases} \tag{3.3.4}$$

В отличие от (3.3.2)–(3.3.3) загрузки $\rho < 1, \rho = 1, \rho > 1$ разграничены значениями $\Pi_y(+\infty)$ *и* $\pi_1(y)$ (см. (3.3.4)).

Конечность моментов первых n порядков у ФР A и B в модели

$GI|G|1|\infty$ влечет их конечность у Π_y и конечность моментов первых $n-1$ порядков у ФР W, W^*, а также у распределений $\{p(m)\}, \{p^*(m)\}$ при $\rho<1$ и $n\geq 1$ [98].

Приведем некоторые **точные** формулы для стационарных $(\rho<1)$ характеристик.

Формула Спитцера [99]. При $s\geq 0$

$$\omega(s)=\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,dW(x)=\exp\Big(\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k}\int_0^{+\infty}(1-\exp(-sx))dR^{k*}(x) \Big), \qquad (3.3.5)$$

где $R(x)=P(v_n-u_{n+1}<x)$, $x\in R^+$. Для ФР $W(x)=P(\sup\limits_{n\geq 0} S_n<x)$, $x\in R^+$, известны представления в виде рядов [21]. Относительно других характеристик отметим [15, 17, 21, 95, 96]. Из (3.3.5) выводится знаменитая **формула Полляйчека–Хинчина** для модели $M|G|1|\infty$ (FIFO), которая также получена различными методами многими авторами: $\omega(s)=\dfrac{(1-\rho)s}{s-a+a\beta(s)}$, где $\beta(s)=\int_0^{+\infty} e^{-sx}dB(x)$. Из нее выводится **формула Коэна** [16]

$$W(x)=(1-\rho)\sum_{n\geq 0}\rho^n H^{n*}(x), \quad x\in[0,+\infty), \qquad (3.3.6)$$

где $H(x)=\dfrac{1}{\beta_1}\int_0^x(1-B(u))du$. Формула (3.3.6) сохраняется и для модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO), но ФР H интерпретируется в терминах случайных блужданий и ее вид сложен [99].

В модели $GI|G|1|\infty$ имеем $P(\zeta=k)=\int_0^\infty(A^{k*}(x)-A^{k+1*}(x))dR(x)$ (см. (3.2.4)). Из (3.2.7) при $\rho<1$ для модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) получаем

$$w^*=\max(0, w+v-\gamma), \qquad (3.3.7)$$

где v имеет ФР B, $P(\gamma<x)=\dfrac{1}{\alpha_1}\int_0^x(1-A(u))du$, $x\in R^+$. Выясняется, что в (3.3.7) **независимы** не только w и v, γ и v, но и w и γ. На этом свойстве основана **формула Хука** [61], которая менее известна, чем следующая **формула Такача** [100]:

$$W^*(x)=1-\rho+\rho P(w+\delta<x), \quad x\in R^+, \qquad (3.3.8)$$

где $P(\delta<x)=\dfrac{1}{\beta_1}\int_0^x(1-B(u))du$, а СВ w и δ **независимы**. Новые доказательства (3.3.7)–(3.3.8) содержат статьи [100, 101], где при $\rho<1$ приведены также формулы $p_0^*=1-\rho_1$, $p_j^*=\rho P(\zeta=j)$, $j=1,2,\ldots$

Обширна литература по скоростям сходимости к стационарным характеристикам в модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) [15, 96]. Приведем один результат. Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность НОР СВ, где $\xi_n = u_n - v_{n+1} + \delta$, $\delta = \alpha_1 - \beta_1 > 0$. Пусть при некотором $\varepsilon \in (0,1)$ выполнено условие $m_{2+\varepsilon} = M|\xi_1|^{2+\varepsilon} < +\infty$. Тогда

$$0 \le P(w_{n+1} < x) - P(w < x) = \frac{m_{2+\varepsilon}(1+\varepsilon)(4+\varepsilon)}{\varepsilon\delta^{2+\varepsilon}} \cdot \frac{1}{(n+(x/\delta))^{\varepsilon/2}} \text{ при } x \in R^+ \text{ и } n \ge 1.$$

§4. ФОРМУЛЫ ЛИТТЛЯ В МОДЕЛИ $GI|G|1|\infty$

4.1. Дисциплина FIFO. Приведем **эвристическое** обоснование формулы $L = \lambda W$ [102, 103]. Рассмотрим суммарное время, проведенное в модели имеющимися в данный момент вызовами. Оно за время dt в среднем возрастет на Ldt за счет присутствующих вызовов и уменьшается на $W\lambda dt$ за счет в среднем λdt обслуженных вызовов ($\lambda = \alpha_1^{-1}$), поскольку обслуженный вызов уменьшает суммарное время в среднем на W единиц времени. Вклад поступающих вызовов за dt имеет порядок dt^2, и им можно пренебречь, откуда следует (2.1.3).

Приведем **строгое** доказательство формулы (2.1.3). Пусть $s_n = w_n + v_n$, $n \ge 1$ – время пребывания n-го вызова. При $\rho < 1$ имеем $s_n \Rightarrow s = w + v$ $(n \to +\infty)$, где w и v независимы. Из следствия 2.3 [96] выводим

$$M\eta^* = \alpha^{-1} Ms. \tag{4.1.1}$$

Действительно, по элементарной теореме восстановления $\lim\limits_{t\to\infty}(H(t)|t) = = \alpha_1^{-1} = \lambda$ для функции восстановления $H(t)$ процесса $\{t_n : n \ge 0\}$. СВ $\int\limits_0^\tau \eta(t)dt$ есть суммарное время, проведенное в модели вызовами, которые поступили за $\tau = \xi + j$, где ξ – ПЗ, j – последующий промежуток простоя прибора. Тогда

$$\int\limits_0^\tau \eta(t)dt = \sum_{n=1}^{\theta} s_n, \tag{4.1.2}$$

где θ – число обслуженных за ξ вызовов. В частности

$$\frac{1}{M\tau} M\left(\int\limits_0^\tau \eta(t)dt\right) = \frac{M\theta}{M\tau} \cdot \frac{1}{M\theta} M\left(\sum_{n=1}^{\theta} s_n\right). \tag{4.1.3}$$

Так как $u_1 + u_2 + \ldots + u_\theta = \tau$, где θ не зависит от будущего [104], то по формуле Вальда

$$\lambda M\theta = M\tau. \tag{4.1.4}$$

Из (4.1.2)–(4.1.3), следствия 2.3 и формулы (3.7.15) [96] получаем (2.1.3). Далее по формуле связи для η^* и ζ^* находим

$$M\eta^* = M\zeta^* + P(\eta^* > 0). \tag{4.1.5}$$

Так как $P(\eta^* > 0) = P(w^* > 0) = \rho$ и $Ms = Mw + \beta_1$, то из (4.1.1) и (4.1.5) приходим к (2.1.3.).

4.2. *Консервативные дисциплины.* Формула (2.1.3) справедлива в широких подклассах консервативных дисциплин модели $GI|G|1|\infty$. Ниже рассмотрены два таких подкласса.

1. Рассмотрим консервативные дисциплины, для которых

$$s_n \Rightarrow s,\ n \to +\infty,\ \text{и}\ s - \text{собственная СВ.} \qquad (4.2.1)$$

$\{\eta(t): t \ge 0\}$ – регенерирующий процесс с периодом регенерации $\tau = \xi + j$. Тогда справедливы аналог теоремы 2.4 [96], $Me^{-\mu s} = \frac{1}{M\theta} M(\sum_{k=1}^{\theta} e^{-\mu s_k})$ для $\{s_n\}$ при $\mu \ge 0$, и ее следствия, например: $Ms = \frac{1}{M\theta} M(\sum_{n=1}^{\theta} s_n)$; $\eta(t) \Rightarrow \eta^*$, $t \to +\infty$, (последнее устанавливается методом из §3.7 [96]), откуда следует $M\eta^* = \frac{1}{M\tau} M(\int_0^{\tau} \eta(t)dt)$. Далее выводим формулы (4.1.2)–(4.1.3) и получаем (4.1.1).

2. Рассмотрим консервативные дисциплины, для которых нет прерывания обслуживания, выбор вызова на прибор не зависит от реализации длительности обслуживания и справедливо (4.2.1). Тогда инвариантами являются $\{\eta(t): t \ge 0\}$; $\int_0^{\tau} \eta(t)dt$; $\sum_{n=1}^{\theta} s_n$. Сохраняются равенства (4.1.2)–(4.1.3). Далее, $\{\eta(t): t \ge 0\}$ – регенерирующий процесс с периодом регенерации τ и

$$M\eta^* = \frac{1}{\alpha_1 M\theta} M(\sum_{n=1}^{\theta} s_n). \qquad (4.2.2)$$

Обозначим $\varphi_k = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_k$, $k \ge 1$, где θ_k – число обслуженных вызовов за k-й ПЗ, т.е. за ξ_k, $\theta_0 = 0$. При $\varphi_{k-1} < n < \varphi_k$ имеем $\frac{1}{\varphi_k} \sum_{m=1}^{(k-1)\theta} s_m \le \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} s_m \le \frac{1}{\varphi_{k-1}} \sum_{m=1}^{k\theta} s_m$, $k \ge 1$. Обозначим $\tau_k = \sum_{m=\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} s_m = \sum_{m=1}^{\theta_k} s\varphi_{k-1} + m$, $k \ge 1$, где $\{\tau_k\}$ – последовательность НОР СВ. Согласно (4.2.2), при $\varphi_{k-1} < n < \varphi_k$ имеем

$$\frac{1}{\varphi_k} \sum_{m=1}^{k} \tau_m \le \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} s_m \le \frac{1}{\varphi_{k-1}} \sum_{m=1}^{k-1} \tau_m, \quad k \ge 1. \qquad (4.2.3)$$

Применяя к $\{\tau_m\}$ УЗБЧ и ЗБЧ [104], и из-за $M\theta < +\infty$ при $\rho < 1$ заключаем, что $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} s_m \xrightarrow{P} \frac{1}{M\theta} (\sum_{m=1}^{\theta} s_m)$, $n \to \infty$, где $\xrightarrow{P}$ – знак сходимости по вероятности. Значит, существует предел $M(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} s_m) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} Ms_m \to \frac{1}{M\theta} M(\sum_{m=1}^{n} s_m)$, $n \to \infty$, тогда по теореме Штольца и из $s_m \Rightarrow s$, $m \to +\infty$, получаем $Ms = \frac{1}{M\theta} M(\sum_{n=1}^{\theta} s_n)$. Отсюда и из (4.2.2) следует (4.1.1).

Таким образом, нами доказана

Теорема 1. В модели $GI|G|1|\infty$ при $\rho<1$ для подклассов 1–2 консервативных дисциплин справедлива формула Литтля (2.1.3).

§5. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ

Экстремальные задачи в модели $GI|G|1|\infty$ бывают разными. Остановимся на некоторых их типах.

5.1. *Супремумы характеристик по времени.* В модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) обозначим $\hat{w}_n = \max\limits_{0<j\le n} w_j$, $\hat{w}(t) = \sup\limits_{0\le s\le t} w(s)$. Это – экстремальные характеристики, аналоги которых существуют и для ДО и др. Пусть выполнено следующее **условие А**:

$X = v_1 - u_2$ – неарифметическая СВ; найдется $\gamma \ne 0$ такое, что $Me^{\gamma X} = 1$, $M(Xe^{\gamma X}) = \mu_\gamma < +\infty$.

Наряду с точным, интерес представляет и асимптотический анализ экстремальных характеристик. Можно сформулировать следующие утверждения [105]. Пусть $\rho<1$, выполнено **условие А**, вид констант b, b^*, m приведен в [105], $\Lambda(x) = \exp(-\exp(-x))$, $x\in R^1$. Тогда

$$\lim_{t\to+\infty} P(\gamma\hat{w}_n - \log(bn) < x) = \lim_{t\to+\infty} P(\gamma\hat{w}(t) - \log(b^*t) < x) = \Lambda^{1/m}(x).$$

В частности отсюда следует $\dfrac{\hat{w}_n}{\log n^{1/\gamma}} \Rightarrow 1$, $n\to+\infty$, и $\dfrac{\hat{w}(t)}{\log t^{1/\gamma}} \Rightarrow 1$, $t\to+\infty$.

Пусть $\sigma^2 = D(v_1 - u_2) \in R^+$, $\Phi(x)$ – стандартная нормальная ФР, $\rho>1$, $a = (\lambda\rho^2 Du_1 + \lambda Dv_2)^{1/2}$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\dfrac{\hat{w}_n - \lambda^{-1}(\rho-1)}{an^{1/2}} < x) =$
$= \lim\limits_{n\to+\infty} P(\dfrac{\hat{w}(t) - (\rho-1)t}{at^{1/2}} < x) = \Phi(x)$ равномерно по $x\in R^1$.

5.2. *Экстремумы по ФР.* В модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) при $\rho<1$ существуют две стационарные ФР ВО W и W^*, два стационарных распределения ДО $\{p_n\}$ и $\{p_n^*\}$ и т.д. Возникает задача минимизации функционалов $\sup\limits_x |W(x) - W^*(x)|$ и $\sup\limits_n |p_n - p_n^*|$ в классе ФР исходных характеристик при фиксированных α_1 и β_1.

Общеизвестны следующие утверждения, вписывающиеся в проблематику (см., напр., теорему 3.6 [96]). Пусть в модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) при $\rho<1$ A и B – неарифметические ФР, B фиксировано. В таком случае:

1. $W(x) \equiv W^*(x)$, $x\in[0,+\infty)$, тогда и только тогда, когда A – экспоненциальная ФР;

2. $p_n = p_n^*, n\ge 0$, тогда и только тогда, когда A – экспоненциальная ФР.

Следовательно, в модели $M|G|1|\infty$ (FIFO) при $\rho<1$ существует лишь одна стационарная ФР ВО и одно стационарное распределение ДО, что, впрочем, вытекает и из точных формул [16]. Обзор по точным формулам в моделях с ожиданием и пуассоновским потоком содержит работа [106]. Ряд результатов группируется вокруг функционального уравнения $\pi(s)=\beta(s+\alpha_1^{-1}-\alpha_1^{-1}\pi(s))$, $s\in[0,+\infty)$, где $\pi(s)=Me^{-s\pi}$, а π – ПЗ. Аналогом (2.1.2) выступает формула связи $\eta'_{n+1}=\max(0,\eta'_n-1)+\nu_{n+1}$, $n\geq 0, \eta'_0=0$, где η'_n – число вызовов в момент завершения n-го обслуживания, а ν_n – число поступивших за n-ое обслуживание вызовов.

Следующее уточнение утверждений 1–2 установлено А.А. Даниеляном [107].

Теорема 2. В условиях выполнимости 1–2 одновременно для всех $x\in[0,+\infty)$ *либо* $W(x)>W^*(x)$, *либо* $W(x)=W^*(x)$. *Равенство имеет место только и только в случае пуассоновского потока.*

Аналогичный результат получен в модели $GI|G|1|\infty$ (LIFO) [108].

Опишем еще один тип экстремальных задач. Рассмотрим $\omega(s)$, $s\in R^+$, в модели $M|G|1|\infty$, определяемый формулой Поллячека–Хинчина. Пусть независимо от функционирования модели наступают «катастрофы», образующие пуассоновский поток с параметром s. $\omega(s)$ интерпретируем как вероятность отсутствия катастроф за w. В предположении, что известны и фиксированы первые $n\geq 1$ моментов ФР B, т.е.

$$\int_0^\infty t^k dB(t)=\beta_k\in R^+,\quad k=\overline{1,n}, \tag{5.2.1}$$

ставится задача нахождения супремума и инфремума $\omega(s)$ при заданном $s\in R^+$, т.е.

$$\omega(s)\to extremum \tag{5.2.2}$$

в различных классах ФР B, например в сосредоточенных на конечном $[a,b]$. Так как $(1,t,t^2,...,t^n)$ и $(1,t,t^2,...,t^n,\exp(-st))$ образуют **чебышевские** системы функций на $[a,b]$, то из общих фактов теории экстремальных задач на классах ФР с моментными ограничениями [109–111] находится решение экстремальной задачи

$$h(s)=\frac{1-\beta(s)}{s\beta_1}\to extremum \tag{5.2.3}$$

на различных выпуклых и на некоторых невыпуклых классах ФР B с ограничениями (5.2.1). **Вид решения таков, что он подходит при любом** $s\in R^+$! С другой стороны, решения экстремальных задач (5.2.3), (5.2.1) и (5.2.1)–(5.2.2) из-за вида формулы $\omega(s)=\dfrac{1-\rho}{1-\rho h(s)}$ совпадают.

5.3. *Экстремумы по дисциплинам.* Экстремальная задача может заключаться в выборе консервативной дисциплины в модели $GI|G|1|\infty$, доставляющей экстремум тому или иному функционалу потерь. В частности при дифференциации входящего потока на группы однотипных вызовов задачи оптимального упорядочения потоков по линейным критериям представлены в [102].

Интересный результат получен в [112] для модели $M|G|1|\infty$. Здесь при дисциплинах FIFO и LIFO стационарные актуальные и виртуальные ВО совпадают [18]. Рассмотрим подкласс C консервативных дисциплин, в котором процесс $\{w(t):t\geq 0\}$ регенерирующий с моментами регенерации $t_1,t_2,...$ По лемме 3 [112], для любой дисциплины из C и при $\rho<1$ существует стационарное (виртуальное) ВО w^*. Тогда в модели $M|G|1|\infty$ при $\rho<1$ в классе C

$$\omega^*_{FIFO}(s)\leq\omega^*(s)\leq\omega^*_{LIFO}(s),\quad s\in[0,+\infty), \tag{5.3.1}$$

где нижний индекс указывает на дисциплину и $\omega^*(s)=Me^{-sw^*}$. Естественно ожидать, что аналог неравенств (5.3.1) существует и для модели $GI|G|1|\infty$.

5.4. *Моментные неравенства.* В теории модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) распространено получение оценок для моментов основных характеристик, в частности для средних значений (К.Маршалл, М.Мори, Д.Штойян, М.Фейнберг, Р.Бергман и др.). Начнем со знаменитого **неравенства Маршалла**

$$\omega_1=\int_0^\infty x\,dW(x)\leq\frac{Du_1+Dv_1}{2\alpha_1(1-\rho)},\qquad\rho<1. \tag{5.4.1}$$

Дж. Дейли показал, что оценку (5.4.1) можно уточнить: $\omega_1\leq\dfrac{\rho(2-\rho)Du_1+Dv_1}{2\alpha_1(1-\rho)}$. Э. Моле предложил в модели $M|G|s|\infty$ следующую оценку: $\omega_1\leq\dfrac{\lambda(Dv_1+Mv_1^2)}{2s^2(1-(\rho/s))}$, $\rho<s$. Другая оценка принадлежит Д. Штойяну: $\omega_1\leq\dfrac{p}{\rho}\cdot\dfrac{(Dv_1+Mv_1^2)}{2(1-(\rho/s))}$, $\rho<s$, $s\geq 2$, где $p\leq\rho-s+1+\sum_{i=0}^{s-2}\dfrac{(s-1-i)}{i!}\rho^i\exp(-\rho)$.

Подобные оценки найдены и для других стационарных характеристик. Подробный обзор результатов содержит монография Д. Штойяна [113], в которой также уделено внимание устойчивости в стохастических моделях, в частности в моделях очередей.

§6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ В МОДЕЛИ $GI|G|1|\infty$

В модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) с фиксированными загрузками для характеристик действуют фундаментальные законы теории вероятностей (ЦПТ, ЗБЧ, ЗПЛ и их производные).

6.1. *Закон больших чисел.* Следующие результаты можно найти в [96]. В модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO)

$$P(\lim_{n\to+\infty}\frac{w_n}{n}=\max(0,\beta_1-\alpha_1))=P(\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{n}=-\min(0,\beta_1-\alpha_1))=$$

$$=P(\lim_{t\to+\infty}\frac{w(t)}{t}=\max(0,\rho-1))=P(\lim_{t\to+\infty}\frac{I(t)}{t}=-\min(0,\rho-1))=1.$$

Аналогична ситуация и для ДО. Далее, $P(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\xi(x)}{x}=\frac{1}{1-\rho})=1$ при $\rho<1$.

Существуют и **функциональные** ЗБЧ в модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO). А именно, рассматриваются случайные процессы

$$\left\{\sum_{j=0}^{n}w_j : n\ge 0\right\},\quad \left\{\int_0^t w(s)ds : t\ge 0\right\},\quad \left\{\int_0^t \eta(s)ds : t\ge 0\right\} \text{ и т.д.} \qquad (6.1.1)$$

При $\rho<1$ для третьего процесса в (6.1.1) [44] $P(\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}\int_0^t\eta(s)ds=M\eta^*)=1$.

6.2. *Центральная предельная теорема.* В модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) обозначим $\sigma^2=D(v_1-u_2)$. Вначале сформулируем ЦПТ для $\{w_n\}$ и $\{I_n\}$.

При $\rho>1$ и $\sigma^2<+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\frac{w_n-n(\beta_1-\alpha_1)}{\sigma\sqrt{n}}<x\right)=\Phi(x), \qquad (6.2.1)$$

где $\Phi(x)$ – стандартный нормальный закон. При $\rho<1$ и $\sigma^2<+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\frac{I_n-n(\alpha_1-\beta_1)}{\sigma\sqrt{n}}<x\right)=\Phi(x). \qquad (6.2.2)$$

Здесь и ниже сходимость к $\Phi(x)$ равномерна по $x\in R^1$. Далее,

$$\lim_{t\to+\infty}P\left(\frac{w(t)-(\rho-1)t}{\sigma\sqrt{t}}<x\right)=\Phi(x) \text{ при } \rho>1,\ \sigma^2<+\infty \text{ и}$$

$$\lim_{t\to+\infty}P\left(\frac{I(t)-(1-\rho)t}{\sigma\sqrt{t}}<x\right)=\Phi(x) \text{ при } \rho<1,\ \sigma^2<+\infty. \text{ Наконец,}$$

$$\lim_{u\to+\infty}P\left(\frac{\xi(u)-u(1-\rho)^{-1}}{\sigma\sqrt{u}(1-\rho)^{-3/2}}<x\right)=\Phi(x) \text{ при } \rho<1 \text{ и } \sigma^2<+\infty.$$

В модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) при $\rho=1$ в качестве предельных возникают законы, порожденные ФР Φ из-за флюктуационных явлений и наличия барьера в нуле. Обозначим $\Phi_+(x)=G_{1/2}(x)=0$ при $x\in(-\infty,0]$ и

$\Phi_+(x)=2\Phi(x)-1$, $G_{1/2}(x)=2\left(1-\Phi(\frac{1}{\sqrt{x}})\right)$ при $x\in R^+$. При $\rho=1$ и $\sigma^2<+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\frac{w_n}{\sigma\sqrt{n}}<x\right)=\lim_{n\to+\infty}P\left(\frac{I_n}{\sigma\sqrt{n}}<x\right)=\lim_{t\to+\infty}P\left(\frac{w(t)}{\sigma\sqrt{t}}<x\right)=\lim_{t\to+\infty}P\left(\frac{I(t)}{\sigma\sqrt{t}}<x\right)=$$

$$=\Phi_+(x),\qquad \lim_{u\to+\infty}P\left(\frac{\sigma^2\xi(u)}{u^2}<x\right)=G_{1/2}(t).$$

Здесь сходимость равномерна по $x\in R^1$. Результаты (6.2.1), (6.2.2) установлены, по-видимому, нами. Остальные можно найти в [21, 61, 65].

В случае $\sigma^2=+\infty$ возможно получение предельных теорем сходимости к устойчивым законам. Для формулировки аналога (6.2.1) при $\rho>1$ и

$\sigma^2 = +\infty$ предположим существование пределов

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}(1-A(x)) = Cq, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}(1-B(x)) = Cp, \tag{6.2.3}$$

где $1<\alpha<2$, $C>0$, $p\ge 0$, $q\ge 0$, $p+q=1$. Пусть $G_{\alpha,\beta}$ ($1<\alpha<2$, $\beta\in[-1,1]$) – устойчивый закон с показателем α и ассиметрией β, а логарифм характеристической функции определяется равенством

$$\ln\varphi_{\alpha,\beta}(t) = -|t|^{\alpha}\, \Gamma(1-\alpha)\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2} \pm i\beta\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right), \tag{6.2.4}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Знаки «+» и «–» в (6.2.4) берутся при $t>0$ и $t<0$ соответственно (см. [115], гл. 17, §3, (3.18)). Результат приводится без доказательства.

Теорема 3. Пусть $\rho>1$ и выполнены условия (6.2.3) в модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO). Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{w_n - n(\beta_1-\alpha_1)}{(Cn)^{1/\alpha}} < x\right) = G_{\alpha,p-q}(x)$ равномерно по $x\in R^1$.

В модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) действует и функциональная ЦПТ. Например, равномерно по $x\in R^1$ $\lim\limits_{t\to+\infty} P((\int_0^t \eta(s)ds - tM\eta^*)/ct^{1/2} < x) = \Phi(x)$ при $\rho>1$, где c – известная константа [114]. ЦПТ верна и для характеристик модели $GI|G|s|\infty$ при $s\ge 2$ и $\rho>s$. Более того, при оценке скорости сходимости здесь в ЦПТ удается получить оценку Берри–Эссеена $O(n^{-1/2})$ для $\{\zeta_n\}$ и $\{w_n\}$ [93, 94, 115].

6.3. *Закон повторного логарифма.* В модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) для процессов (6.1.1) в случае $\rho<1$ и $\sigma^2<+\infty$ справедлив ЗПЛ [114]. Например, $P(\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}(\int_0^t \eta(s)ds - tM\eta^*)/(2t\log\log t)^{1/2} = c) = 1$, где константа c упомянута выше.

6.4. *Критическая загрузка.* В модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) при критической загрузке ρ близко к единице. Если $\rho<1$, то сходимость нестационарных характеристик к стационарным медленная, а при $\rho\to 1$ характеристики неограниченно растут. Для оценки ситуации рассматривают последовательность моделей с загрузками, стремящимися к единице. Простейшая задача связана со стационарными характеристиками. В качестве предельного закона выступает экспоненциальная ФР. Следующий результат для w в модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO) установлен многими авторами (А.А. Боровков, Дж.Ф. Кингман, Ю.В. Прохоров, У. Уитт). Простое доказательство принадлежит Н.А. Бломквисту [116].

Пусть $\mu = MX_n$, $n\ge 1$, $MX_n^2 = \sigma_0^2 < +\infty$ и $\mu\to 0$. Предположим, что $M|X_n|^3$ равномерно ограничено при $\mu\to 0$. Тогда $\lim\limits_{\mu\to 0} P\left(-\dfrac{\mu w}{2\sigma_0^2} < x\right) =$

$=1-e^{-x}, \quad x \in R^{+}.$

Ситуация интерпретируется в рамках схемы суммирования НОР СВ до случайного индекса. В модели $GI|G|1|\infty$ (FIFO), согласно формуле Коэна, СВ w и $\varepsilon_1+\varepsilon_2+...+\varepsilon_\nu$ одинаково распределены, и случайный индекс ν не зависит от последовательности $\{\varepsilon_n\}$ НОР СВ. ν имеет геометрическое распределение $P(\nu=n)=(1-\rho)\rho^n$ $,n\geq 0$, а $\{\varepsilon_n\}$ – ФР H. Открывается возможность доказательства предельных теорем в условиях $\sigma_0^2=+\infty$ и при критической загрузке.

Более сложна задача выявления поведения нестационарных характеристик при неограниченном росте времени в условиях критической загрузки. Много результатов здесь получено для моделей типа $M|G|1|\infty$. Отметим лишь некоторые объемные исследования, напр., [117–120].

Кафедра теории вероятностей *Поступила 22.11.2005*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Клейнрок Л.** Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979.
2. **Бенеш В.Э.** Математические основы теории телефонных сообщений. М.: Связь, 1968.
3. **Лившиц Б.С., Фидлин Я.В., Харкевич А.Д.** Теория телефонных и телеграфных сообщений. М.: Связь, 1971.
4. **Штермер Х., Белендорф Э.** и др. Теория телетрафика. М.: Связь, 1971.
5. **Акоф Р., Сасиени М.** Основы исследования операций. М.: Мир, 1971.
6. **Зайченко Ю.П.** Исследование операций. Киев: Вища школа, 1975.
7. **Конвей Р.В., Максвелл В.Л., Миллер Л.В.** Теория расписаний. М.: Наука, 1975.
8. **Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М.** Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1984.
9. **Тараканов К.В., Овчаров Л.А., Тырышкин А.Н.** Аналитические методы исследования операций. М.: Сов. радио, 1974.
10. **Новиков О.А., Петухов С.И.** Прикладные вопросы теории массового обслуживания. М.: Сов. радио, 1969.
11. **Саати Т.Л.** Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио, 1965.
12. **Кофман А., Крюон Р.** Массовое обслуживание. Теория и приложения. М.: Мир, 1966.
13. **Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.** Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
14. **Климов Г.П.** Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966.
15. **Боровков А.А.** Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
16. **Гнеденко Б.В., Даниелян Э.А.** и др. Приоритетные системы обслуживания. М.: МГУ, 1973.
17. **Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.** Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982.
18. **Матвеев В.Ф., Ушаков В.Г.** Системы массового обслуживания. М.: МГУ, 1973.
19. **Такач Л.** Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М.: Мир, 1971.
20. **Cohen J.W.** On Regenerative Processes in Queueing Theory. Lecture Notes in Econ. and Math. Systems ,121, Springer-Verlag, 1976.
21. **Prabhu N.U.** Stochastic Storage Processes: Queues, Insurance Risk and Dams. Appl. of Math., 15, Springer-Verlag, 1980.
22. **Kiefer J., Wolfowitz J.** – Trans. Amer. Math. Soc., 1955, v. 78, p. 1–18.
23. **Whitt W.** – Math. Operat. Res., 1982, v. 7, p. 88–94.

24. **Pollaczek F.** Theorie Analytique des Problemes Stochastiques Relatifs a un Groupe de Lignes Telephoniques avec Dispositif d'Attente. Paris: Gauthier-Villars, 1961.
25. **De Smit J.H.A.** Many Server Queueing Systems. Delft: Ph.D. Thesis, Technische Hogeschool.
26. **De Smit J.H.A.** – J. Appl. Prob., 1973, v. 5, p. 153–169.
27. **Kingman J.F.C.** – J. Appl. Prob., 1966, v. 3, № 2, p. 285–326.
28. **Whitt W.** – J. Appl. Prob., 1972, v. 9, p. 650–658.
29. **Minh Do. Le.** – Manag. Science, 1987, v. 33, № 9, p. 1192–1199.
30. **Stidham S.** – Opns. Res., 1972, v. 20, p. 1106–1114.
31. **Stidham S.** – Opns. Res., 1972, v. 20, p. 1115–1126.
32. **Даниелян Э.А., Симонян Э.А.** – Ученые записки ЕГУ, 2003, № 3, с. 25–29 .
33. **Симонян Э.А.** – Моделирование, оптимизация, управление. Ер., ГИУА, 2003, т. 6, № 2, с. 16–21.
34. **Кокс Д., Смит В.** Теория восстановления. М.: Сов. радио, 1967.
35. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. М.: Мир, 1967.
36. **De Smit J.H.A.** – J. Appl. Prob., 1985, v. 22, p. 214–222.
37. **Ушаков В.Г.** Аналитические методы исследования приоритетных систем обслуживания. Автореф. дис. на соискание уч. степени док. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1995.
38. **Marchal W.G., Harris C.M.** – J. Appl. Prob., 1976, v. 13, № 1, p. 118–126.
39. **Teunis J.O.** – Adv. Appl. Prob., 1987, v. 19, p. 240–265.
40. **Коваленко И.Н., Филипова А.А.** Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: Вища школа, 1973.
41. **Коэн Дж., Боксма О.** Граничные задачи в теории массового обслуживания. М.: Мир, 1987.
42. **Hokstad P.** – Opns. Res., 1978, v. 26, p. 510–523.
43. **Cohen J.W.** – Stoch. Proc. Appl., 1982, v. 12, p. 231–248.
44. **Cohen J.W.** On the Analysis of Two-Dimensional Queueing Models. In: Messung Modellierung und Bewertung von Rechner Systeme, eds. p.f. Kuchn and K.M. Shulz. Berlin: Springer-Verlag, 1983, p. 107–121.
45. **Cohen J.W.** On the Analysis of Two-Dimensional Queueing Problems. In: Math. Computer Perform. and Reliability, eds. G. Iazeolla, P.J. Courtois and A. Hordijk. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1984, p. 17–32.
46. **Tijms H.C., Van Hoorn M.H., Federgruen A.** – Adv. Appl. Prob., 1981, v. 13, p. 186–206.
47. **Van Hoorn M.H., Tijms H.C.** – Performance Analysis, 1982, v. 2, p. 22–28.
48. **Van Hoorn M.H.** Algorithms and Approximations for Queueing Systems. Amsterdam: Math. Centre Tract, Math. Centre, 1983.
49. **Боровков А.А.** Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980.
50. **Knessl C., Matkowsky B.J., Schuss Z., Tier C.** – J. Appl. Math., 1987, v. 47, № 2, p. 367–397.
51. **Hokstad P.** – Adv. Appl. Prob., 1979, v. 11, p. 210–255.
52. **Stoyan D.** – Math. Operations forsch. Stat. Ser. Optimiz., 1976, v. 7, p. 587–594.
53. **Knessl C., Matkowsky B.J., Schuss Z., Tier C.** An Integral Equation Approach to the $M|G|2$ Queue. Northwestern University Appl. Math. Techn. Report, 1985, № 8422.
54. **Гнеденко Д.Б., Соловьев А.Д.** – Изв. АН СССР. Техн. киберн., 1974, № 6, с. 113–118.
55. **Соловьев А.Д.** – Изв. АН СССР. Техн. киберн., 1971, № 6, с. 79–90.
56. **Даниелян Э.А., Геокчян А.А.** – Изв. АН СССР. Техн. киберн., 1976, № 6, с. 121–131.
57. **Попов Г.А.** – Ученые записки ЕГУ, 1980, № 2, с. 133–135.
58. **Даниелян Э.А., Попов Г.А.** – ДАН Арм. ССР, 1980, т. XX, № 1, с. 11–15.
59. **Даниелян Э.А.** – Ученые записки ЕГУ, 1987, № 2, с. 9–16.
60. **Danielian E.A., Liese F.** – Rostock Math. Kolloq., 1987, v. 32, p. 67–86.
61. **Hooke T.A.** – Rep. of Opns. Res., Cornell Univ., TR., 1969, № 91.
62. **Kingman J. F.C.** – Proc. Camb. Phil. Soc., 1961, v. 57, p. 902–904.
63. **Kingman J.F.C.** – J. R. Stat. Soc., 1962, B 24, p. 383–392.
64. **Kingman J.F.C.** The Heavy Traffic Approximation in the Theory of Queues. Proc. Symp. on Congestion Theory, Univ. of North Carolina Press, Chapel Hill, 1965, p. 137–159.
65. **Prabhu N.U.** – J. Appl. Prob., 1970, v. 7, p. 227–233.
66. **Kollerstrom J.** – J. Appl. Prob., 1974, v. 11, p. 544–552.
67. **Прохоров Ю.В.** – Литов. мат. сб., 1963, т. 3, № 1, с. 199–206.
68. **Whitt W.** Weak Convergence Theorems for Queues in Heavy Traffic. Ph.D. Thesis., Cornel

Univ. (Technical Report № 2, Dept. of Oper. Res., Stanford Univ.), 1968.
69. **Боровков А.А.** – ТВП, 1965, т. 10, с. 375–400.
70. **Прессман Е.** – ТВП, 1965, т. 10, с. 63–73.
71. **Iglehart D.L.** – Add. Appl. Prob., 1973, v. 5, p. 570–594.
72. **Iglehart D.L.** – Add. Appl. Prob., 1970, v. 2, p. 150–177.
73. **Iglehart D.L., Whitt W.** – Add. Appl. Prob., 1970, v. 2, p. 355–369.
74. **Iglehart D.L., Kennedy D.P.** – J. Appl. Prob., 1970, v. 7, p. 747–753.
75. **Whitt W.** – J. Appl. Prob., 1970, v. 7, p. 370–375.
76. **Whitt W.** – J. Appl. Prob., 1971, v. 8, p. 74–94.
77. **Whitt W.** – J. Appl. Prob., 1972, v. 9, p. 185–191.
78. **Биллингели П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
79. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
80. **Калашников В.В.** Изв. АН СССР. Техн. киберн., 1974, № 4, с. 43 53.
81. **Калашников В.В.** Изв. АН СССР. Техн. киберн., 1975, № 3, с. 103 108.
82. **Калашников В.В.** – Изв. АН СССР. Техн. киберн., 1977, № 3, с. 87–96.
83. **Калашников В.В.** – ТВП, 1977, т. 22, № 1, с. 89–105.
84. **Калашников В.В., Цициашвили Г.Ш.** – Изв. АН СССР. Техн. киберн., 1972, № 2, с. 41–49.
85. **Калашников В.В.** Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. М.: Наука, 1978.
86. **Цициашвили Г.Ш.** – ТВП, 1975, т. 20, № 2, с. 345–358.
87. **Золотарев В.М.** – ТВП, 1975, т. 20, № 1, с. 215–217.
88. **Золотарев В.М.** – ТВП, 1975, т. 20, № 4, с. 834–847.
89. **Золотарев В.М.** – ТВП, 1976, т. 21, № 2, с. 260–279.
90. **Franken P.** – Operations forschung und Math. Stat., 1970, v. 11, S, p. 1–23.
91. **Петров В.В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
92. **Нагаев С.В.** ТВП, 1970, т. 15, № 1, сс. 179–199, 419–441.
93. **Xing Jin.** – J. Appl. Prob., 1988, v. 25, p. 596–611.
94. **Xing Jin, Wang Rongxing** – Acta Math. Sinica, 1986, v. 29, p. 651–657.
95. **Cohen J.W.** The Single Server Queue. Amsterdam: North Holland, 1969.
96. **Даниелян Э.А., Симонян А.Р.** Введение в теорию очередей. Ер.: Изд-во РАУ, 2006.
97. **Григорян Г.С., Даниелян А.А.** – Матем. в высш. школе. Ер.: Изд-во ГИУА, 2005, № 4.
98. **Thorisson H.** – Stoch. Proc. and Appl., 1985, v. 19, p. 85–99.
99. **Spitzer F.** – Trans. Amer. Math. Soc., 1956, v. 82, p. 323–339.
100. **Harrison J.M., Lemoine A.J.** – J. Appl. Prob., 1970, v. 13, № 4, p. 833–836.
101. **Lemoine A.J.** – J. Appl. Prob., 1974, v. 17, № 4, p. 849–852.
102. **Бронштейн О.И., Духовный И.М.** Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах . М.: Наука, 1976.
103. **Krakowski M.** – Rev. franc. automat. inform. rech. operat., 1973, v. 7, NV-1.
104. **Боровков А.А.** Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
105. **Iglehart D.L.** – Ann. Math. Stat., 1972, v. 43, № 2, p. 627–635.
106. **Даниелян Э.А., Хачикян Х.З.** – Ученые записки ЕГУ, 2001, № 1, с. 1 19.
107. **Даниелян А.А.** Ученые записки ЕГУ, 2005, № 3, с. 47 52.
108. **Даниелян А.А.** – Вестник РАУ, 2005, № 1, с. 23–31.
109. **Карлин С., Стадден В.** Чебышевские системы и их примиенение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
110. **Крейн М.Г., Нудельман А.А.** Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
111. **Danielian E.A.** Optimization of Functionals on Classes of Distributions with Moments' Constraints. Tampere, Finland, Part 1, TICSP, Series 16, 2002, Part 2, TICSP, Series 18, 2003.
112. **Даниелян И.Э.** – Изв. НАН Армении. Математика, 2002, т. 37, № 3, с. 21–36.
113. **Штойян Д.** Качественные свойства и оценки статистических моделей. М.: Мир, 1979.
114. **Iglehart D.L.** – Adv. App. Prob., 1971, v. 3, № 2, p. 269–281.
115. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
116. **Blomqvist N.A.** – Scand. J. Statist., 1974, v. I, № 1, p. 39–40.
117. **Даниелян Э.А.** – Изв. АН Арм. ССР. Математика, 1975, т. 10, № 3, с. 272-287.
118. **Угарид М.** Модели типа $M|G|1|\infty$ при критической загрузке: Автореф. дис. на соиска-

ние уч. степени канд. физ.-мат. наук. Ер., 1990.
119. **Читчян Р.Н.** Предельные теоремы в приоритетных моделях $M_r|G_r|1|\infty$ в условиях критической загрузки: Автореф. дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. Вильнюс, 1982.
120. **Azlarov T.A., Husseinov J.M.** Some Limit Theorems for a Queueing System with Absolute Priority in Heavy Traffic. Springer-Verlag, 1976.

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Ա. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Ի. Է. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

ՀԵՐԹԵՐԻ ՕՐԻՆԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՍՊԱՍՈՒՄՈՎ ՄՈԴԵԼՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում համառոտակի նկարագրված է հերթերին վերաբերող խնդիրների զարգացումը, հերթերի պատկանելիությունը գործողությունների հետազոտմանը և հավանականությունների տեսությանը՝ ըստ խնդրի դրվածքի և օգտագործվող մեթոդների:

Սպասումով բազմալար մոդելներում առկա օրինաչափությունները բացատրված են $GI|G|s|\infty$ մոդելի օրինակի վրա. ճշգրիտ բանաձևեր, սահմանային թեորեմներ ֆիքսված և կրիտիկական ծանրաբեռնվածությունների դեպքերում, կայունություն, անհավասարություններ հիմնական բնութագրիչների համար, էքստրեմալ խնդիրներ: Քննարկված են տեսության հիմնական մեթոդները:

Հիմնական ուշադրությունը հետազայում կենտրոնացված է $GI|G|1|\infty$ մոդելի վրա FIFO հերթակարգի դեպքում: Բնութագրերի համար ձևակերպված են արդյունքներ ինչպես հայտնի և դասական դարձած, այնպես էլ հեղինակներին պատկանող: Օրինակ՝ $GI|G|1|\infty$ մոդելում բերված են երկու խումբ պայմաններ, որոնց դեպքում տեղի ունեն Լիթլի բանաձևերը: Մասնավորապես դիտարկված է $M|G|1|\infty$ մոդելը:

E. A. DANIELIAN, A. A. DANIELIAN, I. E. DANIELYAN

THE REGULARITIES OF QUEUES IN MODELS WITH INFINITE WAITING ROOM

Summary

In the present paper the developments of Queueing Theory is described, its belongness to Operations Research and Probability Theory is substantiated.

The Regularities of Many Servers Queues with infinite waiting room are explained on the example of $GI|G|s|\infty$ model. The explicit formulas, limit theorems in fixed and heavy traffic conditions, stability, inequalities for the main characteristics, extremal problems are presented.

The main attention in future is given to $GI|G|1|\infty$ model with FIFO service discipline. Not only known results are formulated but also some results, which were established by authors. For instance, in $GI|G|1|\infty$ model two groups of assumptions are suggested, which lead to the Little formulas. In particular, $M|G|1|\infty$ model is considered.