ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2006 Естественные науки

Математика

УДК 519.6

А. Б. ГРИГОРЯН

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МНОГОСЕТОЧНЫЙ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА
II. МНОГОСЕТОЧНЫЙ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ

Работа, состоящая из двух частей, посвящена построению алгебраических многосеточных переобуславливателей для матриц жесткости, возникающих при конечноэлементной аппроксимации эллиптических уравнений в прямоугольных областях. На одной части границы области стоит условие Дирихле, а на другой – краевое условие третьего рода. Во второй части с использованием последовательности двухсеточных переобуславливателей из [1] строится многосеточный переобуславливатель с внутренними чебышевскими итерациями.

1. Введение. Так как настоящая статья является непосредственным продолжением [1], здесь мы будем использовать все обозначения и результаты упомянутой статьи, делая соответствующие ссылки.

2. Построение многосеточного переобуславливателя. В статье [1] нами была построена последовательность конечноэлементных матриц

$$A \equiv A^{(p)}, A^{(p-1)}, \ldots, A^{(1)}, A^{(0)} \tag{2.1}$$

и соответствующая последовательность двухсеточных переобуславливателей

$$B^{(p)}, B^{(p-1)}, \ldots, B^{(1)}. \tag{2.2}$$

При этом, согласно (5.19) из [1],

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} + A_{21}^{(k)} A_{11}^{(k)^{-1}} A_{12}^{(k)} & B_{23}^{(k)} \\ 0 & B_{32}^{(k)} & \frac{1}{2} A^{(k-1)} + B_{32}^{(k)} B_{22}^{(k)^{-1}} B_{23}^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Перейдем к построению многосеточного переобуславливателя для матрицы жесткости A конечноэлементной системы сеточных уравнений (см. [1], (4.2)) с использованием внутренних чебышевских итерационных процедур.

Выберем некоторое целое число $\nu \geq 1$ и для значений $k = 1, 2, \ldots, p$ последовательно определим матрицы

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} + A_{21}^{(k)} A_{11}^{(k)^{-1}} A_{12}^{(k)} & B_{23}^{(k)} \\ 0 & B_{32}^{(k)} & \frac{1}{2} R^{(k-1)} + B_{32}^{(k)} B_{22}^{(k)^{-1}} B_{23}^{(k)} \end{bmatrix}, \qquad (2.4)$$

где

$$R^{(0)} = A^{(0)} \quad \text{для } k = 1, \qquad (2.5)$$

$$R^{(k-1)} = A^{(k-1)} \left[I^{(k-1)} - \prod_{i=1}^{\nu} \left(I^{(k-1)} - \theta_i^{(k-1)} M^{(k-1)^{-1}} A^{(k-1)} \right) \right]^{-1} \quad \text{для } 2 \leq k \leq p \qquad (2.6)$$

($I^{(k-1)}$ – единичная матрица порядка n_{k-1}). В качестве параметров $\theta_i^{(k-1)}$ выбираются числа

$$\theta_i^{(k-1)} = \frac{2}{(\beta_{k-1} + \alpha_{k-1}) + (\beta_{k-1} - \alpha_{k-1})\zeta_i^{(\nu)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \qquad (2.7)$$

где $\zeta_i^{(\nu)} = \cos \dfrac{2i-1}{2\nu} \pi$, $\quad i = 1, 2, \ldots, \nu$, есть корни многочлена Чебышева первого рода степени ν, а $[\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$ – отрезок, содержащий собственные числа матрицы $M^{(k-1)^{-1}} A^{(k-1)}$:

$$sp(M^{(k-1)^{-1}} A^{(k-1)}) \subset [\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$$

(в дальнейшем символом sp мы будем обозначать *спектр* матрицы).

Получим правило, по которому вычисляются границы $[\alpha_k, \beta_k]$ спектра матрицы $M^{(k-1)^{-1}} A^{(k-1)}$, где $k = 1, 2, \ldots, p$.

Так как по определению $M^{(1)} = B^{(1)}$ (см. (2.3)–(2.5)), то по теореме 5.1А из [1] имеем

$$sp(M^{(1)^{-1}} A^{(1)}) \subset [\alpha_1, \beta_1], \qquad (2.8)$$

где

$$\alpha_1 = 1 \quad , \quad \beta_1 = 3. \qquad (2.9)$$

Предположим, что для некоторого $k \geq 2$

$$sp(M^{(k-1)^{-1}} A^{(k-1)}) \subset [\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}] , \quad \alpha_{k-1} > 0. \qquad (2.10)$$

Имеем

$$M^{(k)^{-1}} A^{(k)} = (M^{(k)^{-1}} B^{(k)})(B^{(k)^{-1}} A^{(k)}). \qquad (2.11)$$

Согласно теореме 5.1А из [1],

$$sp(B^{(k)^{-1}} A^{(k)}) \subset [1,3]. \qquad (2.12)$$

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения

$$B^{(k)} u = \lambda M^{(k)} u. \qquad (2.13)$$

Как нетрудно заметить из блочных представлений (2.3) и (2.4) матриц $B^{(k)}$ и

$M^{(k)}$ соответственно, $\lambda=1$ является собственным числом задачи (2.13). Далее, при дополнительном условии $\lambda\neq1$ задача (2.13) сводится к спектральной задаче

$$A^{(k-1)}u=\lambda R^{(k-1)}u. \qquad (2.14)$$

Из (2.6) и (2.14) последовательно получаем:

$$A^{(k-1)}u=\lambda A^{(k-1)}\left[I^{(k-1)}-\prod_{i=1}^{\nu}\left(I^{(k-1)}-\theta_i^{(k-1)}M^{(k-1)^{-1}}A^{(k-1)}\right)\right]^{-1}u,$$

$$u=\lambda\left[I^{(k-1)}-\prod_{i=1}^{\nu}\left(I^{(k-1)}-\theta_i^{(k-1)}M^{(k-1)^{-1}}A^{(k-1)}\right)\right]^{-1}u,$$

$$\left[I^{(k-1)}-\prod_{i=1}^{\nu}\left(I^{(k-1)}-\theta_i^{(k-1)}M^{(k-1)^{-1}}A^{(k-1)}\right)\right]u=\lambda u,$$

$$\prod_{i=1}^{\nu}\left(I^{(k-1)}-\theta_i^{(k-1)}M^{(k-1)^{-1}}A^{(k-1)}\right)u=(1-\lambda)u.$$

Следовательно, $\lambda=1-\mu$, где μ – собственное число задачи

$$\prod_{i=1}^{\nu}\left(I^{(k-1)}-\theta_i^{(k-1)}M^{(k-1)^{-1}}A^{(k-1)}\right)u=\mu u.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\mu=\prod_{i=1}^{\nu}\left(1-\theta_i^{(k-1)}\eta\right), \qquad (2.15)$$

где η – собственное число матрицы $M^{(k-1)^{-1}}A^{(k-1)}$. Согласно предположению (2.10), $\eta\in[\alpha_{k-1},\beta_{k-1}]$. Таким образом, собственными числами матрицы $M^{(k)^{-1}}B^{(k)}$ являются числа

$$\lambda=1-\prod_{i=1}^{\nu}\left(1-\theta_i^{(k-1)}\eta\right). \qquad (2.16)$$

Имеем

$$\max_{\eta}\left|\prod_{i=1}^{\nu}\left(1-\theta_i^{(k-1)}\eta\right)\right|\le\max_{\alpha_{k-1}\le x\le\beta_{k-1}}\left|\prod_{i=1}^{\nu}\left(1-\theta_i^{(k-1)}x\right)\right|\equiv\gamma_{k-1}. \qquad (2.17)$$

Из (2.16) и (2.17) получим, что собственные числа матрицы $M^{(k)^{-1}}B^{(k)}$ находятся в пределах $1-\gamma_{k-1}\le\lambda\le1+\gamma_{k-1}$, то есть

$$sp(M^{(k)^{-1}}B^{(k)})\subset[1-\gamma_{k-1},1+\gamma_{k-1}]. \qquad (2.18)$$

Из (2.11), (2.12) и (2.18) следует, что

$$sp(M^{(k)^{-1}}A^{(k)})\subset[\alpha_k,\beta_k], \qquad (2.19)$$

где

$$\alpha_k=1-\gamma_{k-1},\quad \beta_k=3(1+\gamma_{k-1}). \qquad (2.20)$$

При этом, как следует из теории чебышевских итерационных методов (см. [2, 3]),

$$\gamma_{k-1} = \frac{2q_{k-1}^{\nu}}{1+q_{k-1}^{2\nu}}, \quad q_{k-1} = \frac{\sqrt{t_{k-1}}-1}{\sqrt{t_{k-1}}+1}, \quad t_{k-1} = \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}}. \tag{2.21}$$

Таким образом, нами построена последовательность матриц

$$M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(p)} \equiv M. \tag{2.22}$$

Матрицу M назовем *многосеточным переобуславливателем* для исходной матрицы жесткости A.

Получим оценку спектрального числа обусловленности матрицы $M^{-1}A$, следуя методике работ [4, 5]. Выше, в (2.21), мы ввели в рассмотрение числа

$$t_k = \frac{\beta_k}{\alpha_k} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, p. \tag{2.23}$$

При этом для спектральных чисел обусловленности матриц $M^{(k)^{-1}}A^{(k)}$ выполняются оценки

$$cond(M^{(k)^{-1}}A^{(k)}) \le t_k \quad , \quad k = 1, 2, \dots, p. \tag{2.24}$$

Как следует из формул (2.9), (2.20) и (2.21), величины t_k могут быть получены с помощью рекуррентной процедуры:

$$t_1 = 3; \quad t_k = 3\left[\frac{\left(\sqrt{t_{k-1}}+1\right)^{\nu} + \left(\sqrt{t_{k-1}}-1\right)^{\nu}}{\left(\sqrt{t_{k-1}}+1\right)^{\nu} - \left(\sqrt{t_{k-1}}-1\right)^{\nu}}\right]^2, \; k = 2, 3, \dots, p. \tag{2.25}$$

Простой анализ показывает, что для значений ν, удовлетворяющих условию

$$\nu^2 > 3, \tag{2.26}$$

последовательность чисел $\{t_k\}_{k=1}^{p}$ является монотонно возрастающей и ограниченной сверху (при неограниченном росте числа уровней измельчения сетки p):

$$t_1 < t_2 < \dots < t_p < t_* \; . \tag{2.27}$$

Таким образом, мы можем брать лишь значения $\nu \ge 2$. С другой стороны, чем больше ν, тем бóльший объем вычислительной работы потребуется для решения системы с матрицей M. Непосредственный подсчет числа арифметических операций показывает, что оптимальным (с точки зрения пропорциональности объема вычислений числу узлов самой мелкой сетки ω_p) является выбор $\nu = 2$ и $\nu = 3$ (см. п. 3). Величина t_* из (2.27) определяется как положительное решение уравнения $t = \varphi(t)$, где

$$\varphi(t) = 3\left[\frac{\left(\sqrt{t}+1\right)^{\nu} + \left(\sqrt{t}-1\right)^{\nu}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^{\nu} - \left(\sqrt{t}-1\right)^{\nu}}\right]^2.$$

Вычисляя, получаем

$$t_* = \begin{cases} 3+2\sqrt{3} \approx 6,47 & \text{для} \quad \nu = 2, \\ \dfrac{3+4\sqrt{3}}{3} \approx 3,31 & \text{для} \quad \nu = 3. \end{cases} \tag{2.28}$$

Подводя итог вышесказанному, приходим к следующему утверждению:

Теорема 2.1. Независимо от значений коэффициента c и функции σ (см. [1], (2.2)) в подобластях Π_m и на звеньях ломаной Γ_1 соответственно, справедлива оценка

$$cond(M^{-1}A) \le t_* , \tag{2.29}$$

где величина t_* определяется из (2.28).

3. Арифметическая цена переобуславливателя. В итерационных методах с матрицей $M \equiv M^{(p)}$ в качестве многосеточного переобуславливателя нам необходимо решать системы уравнений с матрицами $M^{(k)}$, где $k = 1, 2, \ldots, p$.

Рассмотрим систему

$$M^{(k)}u = g , \tag{3.1}$$

где $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}; \quad u_i, g_i \in G_k^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3.$

ПРОЦЕДУРА MG PREC/ $M^{(k)}$.

1. Вычисляются сеточные функции

$$f_2 = g_2 - A_{21}^{(k)} A_{11}^{(k)^{-1}} g_1 , \tag{3.2}$$

$$f_3 = 2\left(g_3 - A_{32}^{(k)} B_{22}^{(k)^{-1}} f_2\right). \tag{3.3}$$

2. Для определения u_3 решается система

$$R^{(k-1)}u_3 = f_3 ; \tag{3.4}$$

при $2 \le k \le p$ решение системы (3.4) эквивалентно выполнению ν шагов чебышевского итерационного метода:

$$M^{(k-1)} \frac{u_3^{(i)} - u_3^{(i-1)}}{\theta_i^{(k-1)}} = -A^{(k-1)}u_3^{(i-1)} + f_3 , \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \quad u_3^{(0)} = 0 , \quad u_3 = u_3^{(\nu)}, \tag{3.5}$$

при $k = 1$ решается система

$$A^{(0)}u_3 = f_3 . \tag{3.6}$$

3. Определяются u_2 и u_1 :

$$u_2 = B_{22}^{(k)^{-1}} \left(f_2 - A_{23}^{(k)}u_3\right), \tag{3.7}$$

$$u_1 = A_{11}^{(k)^{-1}} \left(g_1 - A_{12}^{(k)}u_2\right). \tag{3.8}$$

КОНЕЦ ПРОЦЕДУРЫ.

Заметим, что матрицы $A_{11}^{(k)}$ и $B_{22}^{(k)}$ являются диагональными. Поэтому вычисления по формулам (3.2), (3.3), (3.7) и (3.8) не вызывают затруднений.

Далее, в этой процедуре предполагается, что на самой грубой сетке, соответствующей нулевому уровню, система сеточных уравнений (3.6) с матрицей $A^{(0)}$ решается с помощью некоторого прямого метода с затратой $O(1)$ арифметических операций.

В заключение дадим оценку числа арифметических операций, затрачиваемых на выполнение одного шага переобуславливания. Введем следующие обозначения:

$A_{ops}^{(k)}$ – число арифметических операций, требуемых для решения системы (3.1) с матрицей $M^{(k)}$ ($k=1,2,\dots,p$);

$A_{ops}^{(0)}$ – число арифметических операций, требуемых для решения системы (3.6) с матрицей $A^{(0)}$.

Путем прямых вычислений (Процедура MG PREC/$M^{(k)}$) нетрудно получить следующие выражения, ограничивающие сверху введенные сложностные характеристики:

$$A_{ops}^{(k)} \le 10n_k + (10\nu - 2)n_{k-1} + \nu A_{ops}^{(k-1)}, \quad 2 \le k \le p,$$

$$A_{ops}^{(1)} \le 10n_1 - n_0 + A_{ops}^{(0)}.$$

Пользуясь соотношением между числом узлов сетки на двух соседних уровнях (см. [6])

$$4 - O(2^{-k}) \le \frac{n_k}{n_{k-1}} \le 4, \quad k = 1,2,\dots,p, \tag{3.9}$$

получим $A_{ops}^{(k)} \cong (9{,}5 + 2{,}5\nu)n_k + \nu A_{ops}^{(k-1)}$, $2 \le k \le p$; $A_{ops}^{(1)} \cong 9{,}75n_1 + A_{ops}^{(0)}$. Тогда $A_{ops}^{(p)} \cong (9{,}5+2{,}5\nu)[n_p + \nu n_{p-1} + \dots + \nu^{p-2} n_2] + 9{,}75\nu^{p-1}n_1 + \nu^{p-1} A_{ops}^{(0)}$, а так как $9{,}75 \le 9{,}5 + 2{,}5\nu$, то $A_{ops}^{(p)} \cong (9{,}5+2{,}5\nu)[n_p + \nu n_{p-1} + \dots + \nu^{p-1} n_1] + \nu^{p-1} A_{ops}^{(0)}$. Принимая во внимание левое из неравенств (3.9), получим:

$$A_{ops}^{(p)} \cong (9{,}5+2{,}5\nu)\left[1 + \left(\frac{\nu}{4}\right) + \left(\frac{\nu}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\nu}{4}\right)^{p-1}\right] n_p + \nu^{p-1} A_{ops}^{(0)}.$$

Отсюда для значений $\nu \le 3$ $A_{ops}^{(p)} \cong \dfrac{38+10\nu}{4-\nu} n_p + \nu^{p-1} A_{ops}^{(0)}$.

Далее, пользуясь легко проверяемым неравенством $3^{p-1} \le n_p$, получим:

$$A_{ops}^{(p)} \cong \left[\frac{38+10\nu}{4-\nu} + A_{ops}^{(0)}\right] n_p. \tag{3.10}$$

Назовем величину $A_{ops}^{(p)}$ *арифметической ценой* переобуславливателя.

С одной стороны, чем больше ν, тем меньше число обусловленности (см. (2.28) и (2.29)). С другой стороны, как видно из (3.10), чем больше ν, тем выше арифметическая цена переобуславливателя. Введем величину

$$\Re(\nu)=\sqrt{cond(M^{-1}A)}\,W(\nu)\text{, где } W(\nu)=\frac{38+10\nu}{4-\nu}+A^{(0)}_{ops},$$

которую будем рассматривать в качестве показателя общих вычислительных затрат, требуемых для решения системы сеточных уравнений с переобуславливателем M. Простые вычисления показывают, что

$$\Re(2)\cong 2{,}55(29+A^{(0)}_{ops})\approx 73{,}95+2{,}55A^{(0)}_{ops},$$

$$\Re(3)\cong 1{,}82(68+A^{(0)}_{ops})\approx 123{,}75+1{,}82A^{(0)}_{ops}.$$

Будем считать, что $A^{(0)}_{ops}\cong 2n_0^3/3$. Поэтому

$$\Re(2)\cong 73{,}95+1{,}7n_0^3,\qquad \Re(3)\cong 123{,}75+1{,}22n_0^3.$$

Нетрудно видеть, что $\Re(3)<\Re(2)$ при $n_0>4$. Следовательно, выбор $\nu=3$ предпочтительнее.

Кафедра математических методов и моделирования

Поступила 05.09.2005

ЛИТЕРАТУРА

1. **Григорян А.Б.** – Ученые записки ЕГУ, 2006, № 1, р.
2. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
3. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. **Kuznetsov Yu.A.** – Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1989, v. 4, № 5, p. 351–379.
5. **Hakopian Yu.R.** and **Kuznetsov Yu.A.** – Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1991, v. 6, № 6, p. 453–483.
6. **Axelsson O.** and **Vassilevski P.S.** – Appl. Numer. Math., 1991, v.7, p. 437–451.

Ա. Բ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՑԱՆՑԱՅԻՆ ՎԵՐԱՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐԻՉ ԽԱՌԸ ՏԻՊԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ԷԼԻՊՍԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ II. ԲԱԶՄԱՑԱՆՑԱՅԻՆ ՎԵՐԱՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐԻՉ

Ամփոփում

Աշխատանքը, որը բաղկացած է երկու մասից, նվիրված է ուղղանկյուն տիրույթում էլիպսական հավասարումների վերջավոր տարրային մոտարկման դեպքում առաջացող կոշտության մատրիցների համար հանրահաշվական բազմացանցային վերապայմանավորիչների կառուցմանը: Եզրագծի մի մասի վրա դրված է Դիրիխլեի պայմանը, իսկ մյուսի վրա՝ երրորդ սեռի

եզրային պայմանը: Երկրորդ մասում երկցանցային վերապայմանավորիչների հաջորդականության կիրառումով կառուցվում է չեբիշևյան ներքին իտերացիաներով բազմացանցային վերապայմանավորիչ:

A. B. GRIGORYAN

ALGEBRAIC MULTIGRID PRECONDITIONER FOR ELLIPTIC PROBLEMS WITH MIXED TYPE BOUNDARY CONDITIONS II. MULTIGRID PRECONDITIONER

Summary

The present paper, consisting of two parts, is devoted to constructing algebraic multigrid preconditioners for stiffness matrices arising in finite element approximation of elliptic problems in rectangular domains. The Dirichlet condition is placed on one part of the boundary and third type condition on the rest of the boundary. In the second part, using a sequence of two-grid preconditioners from [1], the multigrid preconditioner with inner Chebyshev iterations is constructed.