ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2006 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

В. М. БЕЛУБЕКЯН, М. В. БЕЛУБЕКЯН

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОАКТИВНОЙ СИСТЕМЕ СЛОЙ–ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Рассматривается пьезоактивное упругое полупространство с пьезоактивным покрытием. Материалы полупространства и слоя являются пьезоэлектриками класса 6mm с различными свойствами. Касательные напряжения между пьезоэлектриками принимаются равными нулю. Взаимодействие сдвиговых волн в слое и полупространстве обуславливается непрерывностью электрического поля на границе их раздела. Получено условие существования поверхностных волн. Установлена возможность существования двух волн типа Гуляева–Блюстейна.

1. Большое количество работ посвящено исследованию сдвиговых поверхностных электроупругих волн в системе слой–полупространство, когда материалы либо слоя, либо полупространства пьезоактивны (напр. [1, 2]). Имеются также работы, посвященные исследованию сдвиговых волн, локализованных вдоль границы двух пьезоэлектрических полупространств [3–5]. В [6] приводится решение задачи типа Лява, когда слой и полупространство состоят из различных пьезоэлектрических материалов, обладающих кубической симметрией.

В настоящей работе предполагается, что и слой, и полупространство пьезоактивны, но касательные напряжения между ними равны нулю, что приводит к возможности движения слоя относительно полупространства [7].

В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) полупространство занимает область $-\infty < x < \infty$, $0 \le y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, слой – область $-\infty < x < \infty$, $-h \le y < 0$, $-\infty < z < \infty$. Предполагается, что материалы слоя и полупространства принадлежат к различным пьезоэлектрикам класса 6mm. Уравнения чисто сдвиговых волн (антиплоская задача) имеют вид [8, 9]:

$$a_i^2 \Delta w_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \quad \Delta \psi_i = 0, \quad i=1,2. \tag{1.1}$$

Здесь $i=1$ относится к области, занимаемой полупространством, $i=2$ – к слою.

$$a_i^2 = \frac{\tilde{C}_{44}^{(i)}}{\rho_i}, \quad \tilde{C}_{44}^{(i)} = C_{44}^{(i)}(1+\chi_i), \quad \chi_i = \frac{[e_{15}^{(i)}]^2}{\varepsilon_i C_{44}^{(i)}}, \quad \psi_i = \varphi_i - \frac{e_{15}^{(i)}}{\varepsilon_i} w_i, \tag{1.2}$$

где w_i – упругие перемещения, φ_i – электрические потенциалы, $C_{44}^{(i)}$ – модули сдвига, χ_i – коэффициенты электромеханической связи полупространства и слоя, ψ_i – неизвестная потенциальная функция.

Условия контакта между слоем и полупространством задаются в виде:

$$\sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)} = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad D_2^{(1)} = D_2^{(2)} \quad \text{при} \quad y = 0, \tag{1.3}$$

где $\sigma_{23}^{(i)}$ – касательные напряжения, $D_2^{(i)}$ – нормальные компоненты индукции электрического поля. Предполагается, что на свободной поверхности слоя имеют место условия:

$$\sigma_{23}^{(2)} = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при} \quad y = -h. \tag{1.4}$$

Требуется найти решения уравнений (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.3), (1.4) и следующим условиям затухания:

$$\lim_{y\to\infty} w_1 = 0, \quad \lim_{y\to\infty} \psi_1 = 0. \tag{1.5}$$

Введем обозначения: $\eta^2 = \dfrac{\omega^2}{k^2 a_1^2}$, $\theta^2 = \dfrac{a_1^2}{a_2^2}$.

Общее решение уравнений (1.1) в виде гармонических волн для полупространства $(i = 1)$, удовлетворяющее условиям затухания (1.5), получается в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= A_1 \exp\left(-k\sqrt{1-\eta^2}\, y\right) \exp i(\omega t - kx), \\ \psi_1 &= B_1 \exp(-ky) \exp i(\omega t - kx), \\ \varphi_1 &= \left[B_1 \exp(-ky) + \frac{e_{15}^{(1)}}{\varepsilon_1} A_1 \exp\left(-k\sqrt{1-\eta^2}\, y\right)\right] \exp i(\omega t - kx) \end{aligned} \tag{1.6}$$

при условии

$$-1 < \eta < 1. \tag{1.7}$$

Общее же решение уравнения (1.1) для слоя $(i = 2)$ следующее:

$$\begin{aligned} w_2 &= \left[A_2 \exp\left(k\sqrt{1-\theta^2\eta^2}\, y\right) + C_2 \exp\left(-k\sqrt{1-\theta^2\eta^2}\, y\right)\right] \exp i(\omega t - kx), \\ \psi_2 &= \left[B_2 \exp(ky) + F \exp(-ky)\right] \exp i(\omega t - kx), \\ \varphi_2 &= \left[B_2 \exp(ky) + F \exp(-ky) + \frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_2}\left[A_2 \exp\left(k\sqrt{1-\theta^2\eta^2}\, y\right) + \right.\right. \\ &\left.\left. + C_2 \exp\left(-k\sqrt{1-\theta^2\eta^2}\, y\right)\right]\right] \exp i(\omega t - kx). \end{aligned} \tag{1.8}$$

В (1.6)–(1.8) A_i, B_i, C_i, F – произвольные постоянные.

2. Используя связи между напряжениями и индукцией электромагнитного поля с одной стороны, перемещениями и потенциалом с другой, граничные условия (1.3) и (1.4) приведем к виду

$$\tilde{C}_{44}^{(i)}\frac{\partial w_i}{\partial y}+e_{15}^{(i)}\frac{\partial \psi_i}{\partial y}=0,\quad \varphi_1=\varphi_2,\quad \varepsilon_1\frac{\partial \psi_1}{\partial y}=\varepsilon_2\frac{\partial \psi_2}{\partial y}\quad \text{при}\quad y=0; \tag{2.1}$$

$$\tilde{C}_{44}^{(2)}\frac{\partial w_2}{\partial y}+e_{15}^{(2)}\frac{\partial \psi_2}{\partial y}=0,\qquad \varphi_2=0,\qquad \text{при}\quad y=-h. \tag{2.2}$$

Подстановка (1.6), (1.8) в граничные условия (2.1), (2.2) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных:

$$\begin{cases} \gamma_1 A_1+\dfrac{e_{15}^{(1)}}{\tilde{C}_{44}^{(1)}}B_1=0,\\ -\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}B_1=B_2-F,\\ \gamma_2(A_2-C_2)+\dfrac{e_{15}^{(2)}}{\tilde{C}_{44}^{(2)}}(B_2-F)=0,\\ B_1+\dfrac{e_{15}^{(1)}}{\varepsilon_1}A_1=B_2+F+\dfrac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_2}(A_2+C_2); \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \gamma_2(A_2e^{-\gamma_2\zeta}-C_2e^{\gamma_2\zeta})+\dfrac{e_{15}^{(2)}}{\tilde{C}_{44}^{(2)}}(B_2e^{-\zeta}-Fe^{\zeta})=0,\\ B_2e^{-\zeta}+Fe^{\zeta}+\dfrac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_2}(A_2e^{-\gamma_2\zeta}+C_2e^{\gamma_2\zeta})=0, \end{cases} \tag{2.4}$$

где

$$\gamma_1=\sqrt{1-\eta^2},\quad \gamma_2=\sqrt{1-\theta^2\eta^2},\quad \zeta=kh. \tag{2.5}$$

Из уравнений (2.3) постоянные A_2 и C_2 определяются посредством B_2 и F следующим образом:

$$\begin{aligned} A_2&=-\frac{\varepsilon_2}{2e_{15}^{(2)}}\left[(1+R_1+R_2)B_2+(1-R_1-R_2)F\right],\\ C_2&=-\frac{\varepsilon_2}{2e_{15}^{(2)}}\left[(1+R_1-R_2)B_2+(1-R_1+R_2)F\right], \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$R_1=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\left(1-\frac{\chi_1\gamma_1^{-1}}{1+\chi_1}\right),\quad R_2=\frac{\chi_2\gamma_2^{-1}}{1+\chi_2}. \tag{2.7}$$

Подстановка (2.6) в систему (2.4) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных B_2 и F:

$$\begin{cases} \left[(1+R_1)sh\gamma_2\zeta-R_2ch\gamma_2\zeta+R_2e^{-\zeta}\right]B_2+\left[(1-R_1)sh\gamma_2\zeta+R_2ch\gamma_2\zeta-R_2e^{\zeta}\right]F=0,\\ \left[(1+R_1)ch\gamma_2\zeta-R_2sh\gamma_2\zeta-e^{-\zeta}\right]B_2+\left[(1-R_1)ch\gamma_2\zeta+R_2sh\gamma_2\zeta-e^{\zeta}\right]F=0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (2.8) после некоторых преобразований приводится к виду

$$\Gamma(\eta,\zeta,\chi_i)\equiv\chi_2\gamma_2^{-1}(1+\chi_2)^{-1}\left[(ch\zeta+R_1 sh\zeta)ch\gamma_2\zeta-R_2 sh\zeta\, sh\gamma_2\zeta-1\right]-$$
$$-(sh\zeta+R_1 ch\zeta)sh\gamma_2\zeta+R_2(ch\zeta\, ch\gamma_2\zeta-1)=0. \tag{2.9}$$

3. Уравнение (2.9) в частном случае при $\zeta\to\infty$ (волны локализованные у границы контакта двух полупространств [7]) распадается на два уравнения:

$$\Gamma_1(\eta,\infty,\chi_i)\equiv\frac{\varepsilon_2\chi_1}{1+\chi_1}\sqrt{1-\theta^2\eta^2}+\frac{\varepsilon_1\chi_2}{1+\chi_2}\sqrt{1-\eta^2}-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\theta^2\eta^2}=0, \tag{3.1}$$

$$\Gamma_2(\eta,\infty,\chi_i)\equiv\sqrt{1-\theta^2\eta^2}-\frac{\chi_2}{1+\chi_2}=0. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.1) имеет одно действительное решение в промежутке $0<\eta^2<1$, т.к.

$$\Gamma_1(0,\infty,\chi_i)\equiv\frac{\varepsilon_2\chi_1}{1+\chi_1}+\frac{\varepsilon_1\chi_2}{1+\chi_2}-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)<0, \tag{3.3}$$

$$\Gamma_1(1,\infty,\chi_i)\equiv\frac{\varepsilon_2\chi_1}{1+\chi_1}\sqrt{1-\theta^2}>0,\quad \theta^2<1,\quad \frac{d\Gamma_1}{d\eta}>0.$$

Уравнение же (3.2) имеет решение при условии

$$1-\frac{\chi_2^2}{(1+\chi_2)^2}<\theta^2\le 1. \tag{3.4}$$

В случае одинаковых материалов ($\chi_1=\chi_2=\chi$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$, $\theta=1$) корни уравнений одинаковые:

$$\eta^2=1-\chi^2(1+\chi)^{-2}, \tag{3.5}$$

что совпадает с формулой для фазовой скорости волны Гуляева–Блюстейна. В длинноволновом приближении ($\zeta^2<<1$) уравнение (2.9) приводится к виду

$$\left[\frac{\chi_2}{(1+\chi_2)\gamma_2}-\gamma_2\right]R_1+\zeta\left[\frac{\chi_2}{2(1+\chi_2)\gamma_2}(1+\gamma_2^2-2R_2\gamma_2)-\gamma_2+\frac{R_2}{2}\right]=0. \tag{3.6}$$

Если в уравнении (3.6) пренебречь также и членом со множителем $\zeta(\zeta<<1)$, то получится два корня. Первый корень

$$\eta^2=1-\frac{\chi_1^2}{(1+\chi_1)^2} \tag{3.7}$$

соответствует скорости волны Гуляева–Блюстейна для полупространства. Второй корень

$$\eta^2=\theta^{-2}\left(1-\frac{\chi_2}{1+\chi_2}\right) \tag{3.8}$$

будет удовлетворять условию затухания (1.7), если

$$\theta^2>1-\frac{\chi_2}{1+\chi_2}. \tag{3.9}$$

В частности для выполнения условия (3.9) достаточно, чтобы $\theta_2>1$, что аналогично условию существования волны Лява (материал слоя «мягче» материала полупространства). Из сравнения (3.7) и (3.8), когда слой и полупространство в частном случае из одинаковых материалов ($\theta = 1$, $\chi_1 = \chi_2$), следует, что волна, соответствующая корню (3.8), быстрее затухает по глубине (более локализована), чем волна Гуляева–Блюстейна.

4. Пусть слой и полупространство имеют одинаковые свойства пьезоэлектрика класса 6mm. Согласно (2.9) дисперсионное уравнение задачи при условиях

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \ \ \chi_1 = \chi_2 = \chi, \ \ \theta^2 = 1 \tag{4.1}$$

имеет вид

$$\gamma_1^2 e^{\zeta} sh\gamma_1\zeta - \alpha\gamma_1(e^{\zeta} ch\gamma_1\zeta + e^{\gamma_1\zeta} ch\zeta - 2) + \alpha^2 e^{\gamma_1\zeta} sh\zeta = 0, \ \alpha = \chi(1+\chi)^{-1}. \tag{4.2}$$

ζ	η_1^2	η_2^2
$\zeta \ll 1$	0,9412	0,7573
0,05	0,9464	0,7574
0,1	0,9498	0,7578
0,3	0,9609	0,7612
1,0	0,9793	0,7853
3,0	0,9872	0,8561

В таблице приводятся значения корней уравнения (4.2) с учетом (2.5) (безразмерных характеристик скоростей локализованных волн) для пьезокерамики PZT56/35 ($\chi = 0{,}32$) в зависимости от относительной толщины слоя ζ. Для каждого значения ζ имеются два корня, что соответствует двум поверхностным волнам. В первой строчке приведены значения корней, полученные по приближенным формулам (3.7) и (3.8). По этим же формулам получены следующие приближенные корни: для окиси цинка (ZnO, $\chi = 0{,}111$) $\eta_1^2 = 0{,}9001$, $\eta_2^2 = 0{,}999$; для сульфида кадмия (CdS, $\chi = 0{,}037$) $\eta_1^2 = 0{,}9643$, $\eta_2^2 = 0{,}9987$; для титаната бария ($BaTiO_3$, $\chi = 0{,}479$) $\eta_1^2 = 0{,}6761$, $\eta_2^2 = 0{,}8951$. Для приведенных значений корней коэффициенты электромеханической связи χ взяты из монографии [10].

Кафедра механики сплошной среды *Поступила 16.02.2006*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Даноян З.Н., Манукян Г.А.** – Изв. НАН Армении. Механика, 1995, т. 48, № 3, с. 43–52.
2. **Даноян З.Н.** Линейные и нелинейные волны в электромагнитоупругих средах: Автореф. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук. Ер., 2005, 42 с.
3. **Maerfeld C., Tournois P.** – Appl. Phys. Lett., 1971, v. 19, № 4, p. 117–121.
4. **Аветисян А.С., Маргарян Дж.** – Изв. НАН Армении. Механика, 1994, т. 47, №3–4, с.31–36.
5. **Li.Sh.** – J. Appl. Phys., 1996, v. 80, № 9, p. 5264–5267.
6. **Zakharenko A.** – Journal of sound and vibration, 2005, v. 285, p. 877–886.

7. **Белубекян М.В., Белубекян В.М.** – Изв. НАН Армении. Механика, 1994, т. 47, № 3–4, с. 78–82.
8. **Балакирев М.К., Гилинский И.А.** Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982, 239 с.
9. **Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А.** Распространение волн в электроупругих средах. М.: Едиториел УРСС, 2003, 336 с.
10. **Royer D., Dieulesaint E.** Elastic waves in solids. V. 1, Masson, 1999, 446 p.

Վ. Մ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱՀՔԻ ԱԼԻՔՆԵՐ ՊՅԵԶՈԱԿՏԻՎ ՇԵՐՏ–ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է պյեզոակտիվ առաձգական կիսատարածություն պյեզոակտիվ շերտով: Կիսատարածության և շերտի նյութերը իրենցից ներկայացնում են 6mm դասի պյեզոէլեկտրիկներ, տարբեր հատկություններով: Ընդունվում է որ դրանց միջև շոշափող լարումները բացակայում են: Սահքի ալիքների փոխազդեցությունը շերտում և կիսատարածությունում պայմանավորված է նրանց եզրի վրա էլեկտրական դաշտի անընդհատությունով: Ստացված է մակերևութային ալիքների գոյության պայմանը: Ստացված է, որ կարող են գոյություն ունենալ Գուլյաևի–Բլյուստեյնի ալիքների տիպի երկու ալիք:

V. M. BELUBEKYAN, M. V. BELUBEKYAN

SURFACE ELECTROELASTIC SHEAR WAVES IN A SYSTEM OF PIEZOACTIVE LAYER AND HALF-SPACE

Summary

A piezoactive half-space with a piezoactive layer on its surface is considered. Materials of the layer and the half-space are piezoelectrics of class *6mm* with different properties. Shear stresses between the two piezoelectrics are taken to be zero. Interaction between shear waves in the layer and the half-space is due to continuity of electrical field on their surface. Existence condition of the surface waves is obtained. It is established, that two waves of Gulayev–Bleustain type can exist in considered system.