Математика

УДК 512.57

Л. Р. НУРБЕКЯН

ТЕОРЕМА КЕЛИ ДЛЯ АЛГЕБР ДЭ МОРГАНА

В данной статье предложена и доказана теорема Кели для алгебр Дэ Моргана, которая дает описание этих алгебр с помощью некоторого класса бинарных функций.

Теорема Кели для алгебр Дэ Моргана дает описание этих алгебр с помощью некоторого класса бинарных функций (такое описание впредь будем называть бинарным).

Вопросы о бинарном описании алгебраических систем рассматривались в работах [1–4]. Например, в статье [2] дано бинарное описание Булевых алгебр, а результат нашей работы будет ее обобщением.

Как известно, алгебра Дэ Моргана – это дистрибутивная решетка $(D,+,\cdot)$, наделенная 0-ем, 1-ей и унарной операцией ~, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$a+0=a,$$

$$(a^{\sim})^{\sim}=a,$$

$$(a+b)^{\sim}=a^{\sim}\cdot b^{\sim},$$

$$0^{\sim}=1 \quad \forall a,b\in D.$$

Рассмотрим некоторое множество X. Обозначим через $Bin(X)$ множество всех бинарных функций, определенных на $X: Bin(X)=$ $=\{f: X\times X\to X\}$.

Определим операции $+,\cdot$ и ~ на множестве $Bin(X)$ следующим образом [1]. Для $f,g\in Bin(X)$

$$(f+g)(x,y)=f(x,g(x,y));$$

$$(f\cdot g)(x,y)=f(g(x,y),y);$$

$$f^{\sim}(x,y)=f(y,x) \quad \forall x,y\in X.$$

Далее пусть $0(x,y)=y$ и $1(x,y)=x$ $(x,\ y\in X)$.

Теперь дадим несколько определений:

а) функция $f: X\times X\to X$ называется *идемпотентной*, если

$$f(x,x)=x \qquad \forall x\in X;$$

б) функция $f: X\times X\to X$ называется *квазидиагональной*, если

$$f(f(x,x),f(x,y))=f(x,y) \qquad \forall x,y\in X;$$

в) функции $f,g: X\times X\to X$ называются *квазикоммутативными*, если

$$f(g(x,x),g(y,z))=g(f(x,y),f(x,z)) \qquad \forall x,y,z\in X.$$

Предположим, что A есть некоторое подмножество множества $Bin(X)$. Тогда если

а) A замкнуто по отношению к операциям $+,\cdot$ и $\sim$;

б) все функции A *идемпотентны* и *квазидиагональны*;

в) всякие две функции из A *квазикоммутативны*;

г) функции 0 и 1 принадлежат A,

то A назовем *Дэ Моргановым классом бинарных функций*.

Теорема (теорема Кели для алгебр Дэ Моргана).

Часть 1. Всякое подмножество множества $Bin(X)$, которое является *Дэ Моргановым классом бинарных функций*, одновременно является и алгеброй Дэ Моргана по отношению к операциям $+,\cdot$ и $\sim$ вместе с функциями 0 и 1 как соответственно ноль и единица алгебры.

Часть 2. Всякая алгебра Дэ Моргана $(D,+,\cdot,\sim,0,1)$ изоморфна некоторому *Дэ Морганову классу бинарных функций* из $Bin(D)$.

Доказательство.

Часть 1. Для доказательства нам достаточно проверить аксиомы алгебры Дэ Моргана, пользуясь свойствами а)–г), которыми наделены *Дэ Моргановы классы бинарных функций.*

Часть 2. Каждому элементу a из D сопоставим функцию $\varphi_a(x,y)=a\cdot x+a^{\sim}\cdot y+x\cdot y \quad (x,y\in D)$.

Для функций $\{\varphi_a\}_{a\in D}$ легко проверяются следующие тождества:

1) $\varphi_a(x,\varphi_b(x,y))=\varphi_{a+b}(x,y)$;

2) $\varphi_a(\varphi_b(x,y),y)=\varphi_{a\cdot b}(x,y)$;

3) $\varphi_a^{\sim}(x,y)=\varphi_{a^{\sim}}(x,y)$;

4) $\varphi_a(x,x)=x$;

5) $\varphi_a(\varphi_a(x,x),\varphi_a(x,y))=\varphi_a(x,y)$;

7) $\varphi_0(x,y)=0(x,y)$;

8) $\varphi_1(x,y)=1(x,y)$;

9) $\varphi_a(1,0)=a \quad \forall x,y,a,b\in D$.

Из последнего равенства следует, что отображение $\varphi : D \to A = \{\varphi_a\}_{a\in D} \subset Bin(D) \mid a \mapsto \varphi_a$ есть биективное отображение. Из остальных тождеств следует, что A – *Дэ Морганов класс бинарных функций*, а значит, алгебра Дэ Моргана. Кроме того, φ сохраняет операции $+, \cdot, \sim$ и элементы 0 и 1 (тождества 1–3, 7, 8), значит, φ – изоморфизм.

Теорема доказана.

Кафедра алгебры и геометрии *Поступило 20.10.2005*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мовсисян Ю.М.** – Изв. АН СССР. Математика, 1989, № 53, с. 1040–1055.
2. **Bloom S.L., Esik Z. and Manes E.G.** – Amer. Math. Monthly, 1990, v. 97, № 9. p. 831–833.
3. **Esik Z.** – International Journal of Algebra and Computation, 1998, v. 8, № 3, p. 311–316.
4. **Мовсисян Ю.М.** – Успехи математических наук, 1998, т. 53, с. 61–114.

Լ. Ռ. ՆՈՒՐԲԵԿՅԱՆ

ՔԵՅԼԻԻ ԹԵՈՐԵՄԸ ԴԵ ՄՈՐԳԱՆԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Սույն հոդվածում ապացուցվում է Քեյլիի թեորեմը Դե Մորգանի հանրահաշիվների համար: Այդ թեորեմը տալիս է Դե Մորգանի հանրահաշիվների ներկայացումը երկտեղանի ֆունկցիաների որոշակի դասի միջոցով:

L. R. NURBEKYAN

CAYLEY'S THEOREM FOR DE MORGAN ALGEBRAS

Summary

In this paper a Cayley's theorem is proved for De Morgan algebras. The theorem gives a representation of De Morgan algebras by some class of binary functions.