ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2006 Естественные науки

Математика

УДК 519.50

И. Г. ХАЧАТРЯН

О ПАРАДОКСАХ ИНТУИТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Сообщение посвящено выяснению причин появления известных парадоксов в интуитивной теории множеств. Доказывается, что процесс образования множеств является незавершаемым, т. е. после образования какой угодно совокупности множеств можно образовать новое множество, а причина появления парадоксов связана с представлением процесса образования множеств как завершаемого процесса, т. е. все множества могут быть образованы.

В интуитивной теории множеств из каких-то объектов образуются множества (т. е. совокупности объектов), которые принимаются как объекты. Затем из имеющихся объектов образуются множества, которые в свою очередь принимаются как объекты и т.д. Покажем, что процесс образования множеств является незавершаемым, т.е. после образования какой угодно совокупности множеств можно образовать новое множество.

Множество всех подмножеств множества X обозначим через 2^X, а объединение всех множеств из совокупности множеств Y – через $\bigcup Y$.

Теорема 1. Пусть X – множество. Тогда $2^X \notin 2^X$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $2^X \in 2^X$. Тогда $2^X \subset X$. Обозначим через S множество тех элементов из 2^X, каждый из которых не является своим элементом. Так как $S \subset 2^X \subset X$, то $S \in 2^X$. Однако соотношения $S \in S$ и $S \notin S$ могут выполняться лишь одновременно, что невозможно. Следовательно, $2^X \notin 2^X$.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 2. Пусть Y – такая совокупность множеств, что $2^y \subset Y$ для каждого $y \in Y$. Тогда $Y \notin Y$.

Теорема 3. Пусть Y – некоторая совокупность множеств, а $X = \bigcup Y$. Тогда $2^X \notin Y$.

Доказательство. Ясно, что $Y \subset 2^X$, а в силу теоремы 1 имеем также $2^X \notin 2^X$. Поэтому $2^X \notin Y$.

Теорема доказана.

Теорема 3 показывает, что процесс образования множеств является незавершаемым, а выражение «все множества» – бессмысленным. Однако имеет смысл говорить о всех имеющихся множествах и их множестве.

Теорема 3 опровергает укоренившееся представление о том, что процесс образования множеств является завершаемым (т. е. все множества могут быть образованы), а причина появления в интуитивной теории множеств известных парадоксов связана с самим интуитивным понятием множества (по этому поводу см. [1], стр. 39–63; [2], стр. 224; [3], стр. 357; [4], стр. 332–341). На самом деле причина появления этих парадоксов заключается в неправильном представлении о характере процесса образования множеств. Таким образом, при восприятии процесса образования множеств как незавершаемого процесса интуитивная теория множеств становится свободной от известных парадоксов. Вопреки мнению, высказанному в [5], стр. 14, построение теории множеств можно осуществить на интуитивной основе.

Более подробному обсуждению рассматриваемых вопросов, а также некоторых вопросов, связанных с формализацией интуитивной теории множеств, автор намерен посвятить отдельную статью.

Кафедра дифференциальных уравнений *Поступило 11.10.2006*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Клини С.К.** Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.
2. **Клини С.К.** Математическая логика. М.: Мир, 1973.
3. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
4. **Бурбаки Н.** Теория множеств. М.: Мир, 1965.
5. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970.

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆԵՐԶԳԱՅԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՊԱՐԱԴՈՔՍՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածը նվիրված է բազմությունների ներզգայական տեսությունում հայտնի պարադոքսների առաջացման պատճառների բացահայտմանը: Ապացուցվում է, որ բազմություններ կազմելու պրոցեսն ավարտ չունեցող է, այսինքն՝ կամայական համախմբությամբ բազմություններ կազմելուց հետո կարելի է կազմել նոր բազմություն, իսկ պարադոքսների առաջացման պատճառը բազմություններ կազմելու պրոցեսը որպես ավարտ ունեցող

պրոցես ընկալելն է, դառ որի բոլոր բազմությունները կարող են լինել կազմված:

I. G. KHACHATRYAN

ON PARADOXES OF INTUITIVE THEORY OF SETS

Summary

The message investigates the reasons of occurrence of known paradoxes in the intuitive set theory. We prove, that the process of formation of sets is non-finishing, i.e. after formation of arbitrary set of sets it is possible to form a new set, and the reason of occurrence of paradoxes is connected with representation of process of formation of sets as a finishing process, i.e. all sets can be formed.