ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2007 Естественные науки

Математика

УДК 519.2

Г. С. АРУТЮНЯН

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ ХОРДЫ ДЛЯ ПРАВИЛЬНОГО ШЕСТИУГОЛЬНИКА

В статье приводится элементарное выражение функции распределения длины хорды для правильного шестиугольника. Эта формула получена методом δ-формализма в тождестве Плейеля.

Введение. Обозначим через G пространство ненаправленных прямых на евклидовой плоскости R^2. Каждая прямая $g \in G$ однозначно определяется двумя параметрами p и φ, где p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, и φ – угол между этим перпендикуляром и положительным направлением оси X; (p,φ) – стандартные координаты прямой $g \in G$.

В пространстве G рассмотрим меру $\mu(\cdot)$, локально конечную и инвариантную относительно группы всех евклидовых движений плоскости (т.е. вращений и параллельных переносов). Элемент этой меры с точностью до постоянного множителя имеет следующий вид: $\mu(dg) = dpd\varphi$, где dp – одномерная мера Лебега, а $d\varphi$ – угловая мера.

Обозначим через $[D]$ множество прямых, пересекающих ограниченное выпуклое множество D. $[D] = \{g \in G : g \cap D \neq \phi\}$.

Известно (см. [1, 2]), что $\mu([D]) = |\partial D|$, где ∂D – периметр множества D, а $|\partial D|$ – его длина.

Случайная прямая в $[D]$ есть прямая с распределением, пропорциональным сужению меры μ на $[D]$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{|\partial D|} \tag{1}$$

для любого борелевского множества $A \subset [D]$.

Обозначим через A_D^y множество тех прямых, каждая из которых пересекает D и образует хорду $\chi(g) = g \cap D$ длины меньше y: $A_D^y = \{g \in [D] : |\chi(g)| < y\}, \quad y \in R.$

Функция распределения длины случайной хорды χ выпуклой области D обычно определяется как

$$F(y)=\frac{1}{|\partial D|}\mu(A_D^y)=\frac{1}{|\partial D|}\iint_{A_D^y} d\varphi\, dp\,. \tag{2}$$

Следовательно, для получения функции распределения длины хорды ограниченной выпуклой области D надо вычислить интеграл в правой части (2). Явные формулы для функций распределения длины хорды известны только для круга, правильного треугольника [3], прямоугольника [4] и правильного пятиугольника [5].

Основная задача статьи – получение элементарного выражения для функции распределения длины хорды в случае правильного шестиугольника. Эта формула получена методом δ-формализма в тождестве Плейеля.

Тождество Плейеля. Пусть D – ограниченный выпуклый многоугольник на плоскости и $a_1,\ldots,$ a_n – его стороны. Тождество Плейеля для D имеет следующий вид [1, 2]:

$$\int_{[D]} f(|\chi(g)|)dg=\int_{[G]} f'(|\chi|)|\chi|\cot\alpha_1\cot\alpha_2\, dg+\sum_{i=1}^{n}\int_0^{|a_i|} f(u)du, \tag{3}$$

где α_1 и α_2 – углы между D и g в концах хорды $\chi(g)=g\cap D$, лежащие в одной полуплоскости относительно внутренности многоугольника D, $|a_i|$ – суть длины сторон a_i, $i=1,\ldots,n$.

Р.В. Амбарцумян в монографиях [1] и [2] показал, что тождество (3) полезно при вычислении функции распределения длины хорды в случае ограниченного выпуклого многоугольника. Если подставить в (3)

$$f_y(u)=\begin{cases}0, & \text{åñëè} \quad u\le y,\\ 1, & \text{åñëè} \quad u>y,\end{cases}$$

то интеграл в левой части будет равен $\mu\{g\in[D]:|\chi(g)|>y\}$, т.е. инвариантной мере множества хорд многоугольника D, длины которых больше y.

Производную функции $f_y(u)$ нужно заменить на δ-функцию Дирака, концентрированную в точке y. Следовательно, получаем

$$\begin{aligned}[1-F(y)]|\partial D|=&\sum_{i<j}^{I}\iint_{[a_i]\cap[a_j]}\delta(|\chi|-y)|\chi|\cot\alpha_1\cot\alpha_2 dg+\\ &+\sum_{i<j}^{II}\iint_{[a_i]\cap[a_j]}\delta(|\chi|-y)|\chi|\cot\alpha_1\cot\alpha_2 dg+\sum_{i=1}^{n}(|a_i|-y)^+,\end{aligned} \tag{4}$$

где $[a_i]\cap[a_j]$ – множество прямых, пересекающих обе стороны a_i и a_j многоугольника D, $(|a_i|-y)^+=|a_i|-y$, если $|a_i|-y>0$ и 0 в остальных случаях, $\sum^{\mathrm{I}}$, $\sum^{\mathrm{II}}$ распространяются на все пары непараллельных и параллельных сторон a_i и $a_j\subset\partial D$ соответственно.

Для любой непрерывной функции f имеем [6]:

$$\int_{R^n} \delta(x-y) f(x)\,dx = f(y). \tag{5}$$

Для $\{a_i, a_j\} \in \sum_{i<j}^{I}$ делаем замену переменной $(p,\varphi) \to (|\chi|,\varphi)$ и, используя (5) и

$$dg = dp\,d\varphi = \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{|\sin(\alpha_1+\alpha_2)|}\, d|\chi|\, d\varphi, \tag{6}$$

получаем $\iint\limits_{[a_i]\cap[a_j]} \delta(|\chi|-y)|\chi|\cot\alpha_1 \cot\alpha_2 dg = \dfrac{y}{\sin\gamma_{ij}} \int\limits_{\Phi_{ij}(y)} \sin\varphi \sin(\gamma_{ij}-\varphi)\,d\varphi$, где γ_{ij} – угол между непараллельными сторонами a_i и a_j (или их продолжениями),

$\Phi_{ij}(y) = \{\varphi :$ ñóù åñòâóåòõî ðäàäëèí û y, ñî åäèí ÿþ ù àÿ a_i è a_j,

èì åþ ù àÿ í àï ðàâëåí èå $\varphi\}$.

Кроме того, для параллельных сторон a_i и a_j (т.е. $\{a_i, a_j\} \in \sum_{i<j}^{II}$) получаем

$$\sum_{i<j}^{II} \iint\limits_{[a_i]\cap[a_j]} \delta(|\chi|-y)|\chi|\cot\alpha_1 \cot\alpha_2 dg =$$

$$= 2\sum_{i<j}^{II} I(b_{ij}<y) \int \delta(|\chi|-y)|\chi| h(\varphi_\chi) \tan^2\varphi_\chi \frac{d\varphi_\chi}{d|\chi|} d|\chi| =$$

$$= 2\sum_{i<j}^{II} I(b_{ij}<y) h(\varphi_y) \tan^2\varphi_y \frac{b_{ij}}{\sqrt{y^2 - b_{ij}^2}},$$

где $\varphi_y = \arccos\dfrac{b_{ij}}{y}$ или $2\pi - \arccos\dfrac{b_{ij}}{y}$, $h(\varphi) \neq b_{ij}$ есть сумма высот параллелограммов, две стороны которых равны $\chi(\varphi) = g(\varphi) \cap D$, $g(\varphi) \in [a_i] \cap [a_j]$, а две другие стороны лежат на параллельных сторонах a_i и a_j, $h(\varphi_y) = h(\varphi_\chi)$, для которого $|\chi(\varphi)| = y$. Нетрудно убедиться, что $\dfrac{d\varphi_y}{dy} = \dfrac{b_{ij}}{y\sqrt{y^2 - b_{ij}^2}}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 - F(y) = \frac{1}{|\partial D|} \Bigg[& y \sum_{i<j}^{I} \frac{1}{\sin\gamma_{ij}} \int\limits_{\Phi_{ij}(y)} \sin\varphi \sin(\gamma_{ij}-\varphi)\,d\varphi - \\ & -2\sum_{i<j}^{II} I(b_{ij}<y) h(\varphi_y) \frac{\sqrt{y^2 - b_{ij}^2}}{b_{ij}} + \sum_{i=1}^{n} (|a_i| - y)^+ \Bigg]. \end{aligned} \tag{7}$$

Функция распределения длины хорды. Рассмотрим частный случай формулы (7), когда D есть правильный шестиугольник со стороной a. Имеем

$$F(y)=1-\frac{2y}{a\sqrt{3}}\int\limits_{\Phi_{12}(y)}\sin\varphi\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right)d\varphi-\frac{2y}{a\sqrt{3}}\int\limits_{\Phi_{13}(y)}\sin\varphi\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)d\varphi+$$
$$\frac{1}{2a}I(a\sqrt{3}<y<2a)\frac{\sqrt{y^2-3a^2}\,(a-\sqrt{y^2-3a^2}\,)}{y}-\frac{1}{a}(a-y)^+. \tag{8}$$

Следовательно, для того чтобы получить явный вид функции распределения $F(y)$ для правильного шестиугольника в терминах элементарных функций, мы должны найти области $\Phi_{12}(y)$ (соседние стороны) и $\Phi_{13}(y)$, а затем вычислить интегралы в правой части (8).

Найдем область $\Phi_{12}(y)$. Имеем

$\Phi_{12}(y)=\{\varphi$: существует прямая направления φ, пересекающая соседние стороны a_1 и a_2 шестиугольника и образующая хорду длины $y\}$.

Рассмотрим прямую g с параметрами (p,φ). Найдем точку пересечения этой прямой с отрезком a_1, лежащим на оси OX:

$$\begin{cases} x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0, \\ y=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=\dfrac{p}{\cos\varphi}, \\ y=0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$g\cap a_1=\begin{cases} x=\dfrac{p}{\cos\varphi}, \\ y=0, \\ p\le a\cos\varphi. \end{cases}$$

Найдем точку пересечения прямой g с отрезком a_2:

$$\begin{cases} x\cos\varphi+y\sin\varphi=0, \\ y=-\sqrt{3}x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{p}{\sqrt{3}\sin\varphi-\cos\varphi}, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}p}{\sqrt{3}\sin\varphi-\cos\varphi}. \end{cases}$$

Поэтому

$$g\cap a_2=\begin{cases} x=-\dfrac{p}{\sqrt{3}\sin\varphi-\cos\varphi}, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}p}{\sqrt{3}\sin\varphi-\cos\varphi}, \\ p\le a\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Прямая g, пересекая соседние стороны a_1 и a_2, образует хорду χ длины

$$|\chi| = \sqrt{\left(\frac{p}{\cos\varphi} + \frac{p}{\sqrt{3}\sin\varphi - \cos\varphi}\right)^2 + \frac{3p^2}{(\sqrt{3}\sin\varphi - \cos\varphi)^2}} = \frac{\sqrt{3}p}{2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\cos\varphi}.$$

Таким образом, имеем следующую систему :

$$\begin{cases} p \le a\cos\varphi, \\ p \le a\sin(\varphi - \pi/6), \\ |\chi| = \dfrac{\sqrt{3}p}{2\sin(\varphi - \pi/6)\cos\varphi}. \end{cases} \tag{9}$$

Если $\cos\varphi \le \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi$, то $\frac{3}{2}\cos\varphi \le \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi$. И поэтому $tg\varphi \ge \frac{\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, получаем $\varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Пусть $\varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда (9) примет следующий вид:

$$\begin{cases} p \le a\cos\varphi, \\ |\chi| = \dfrac{\sqrt{3}p}{2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\cos\varphi}, \end{cases} \qquad \chi_{\max}(\varphi) = \frac{\sqrt{3}a}{2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Функция $\chi_{\max}(\varphi)$ в области $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ убывает, и $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_{\min} = \frac{\pi}{2}$.
$\chi_{\max}(\varphi_{\max}) = \sqrt{3}a$, $\chi_{\max}(\varphi_{\min}) = a$.

Пусть теперь $\varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$. В этом случае (9) примет вид

$$\begin{cases} p \le a\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right), \\ |\chi| = \dfrac{\sqrt{3}p}{2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\cos\varphi}, \end{cases} \qquad \chi_{\max}(\varphi) = \frac{\sqrt{3}a}{2\cos\varphi}.$$

Здесь функция $\chi_{\max}(\varphi)$ в области $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ возрастает, и $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_{\min} = \frac{\pi}{6}$.
$\chi_{\max}(\varphi_{\max}) = \sqrt{3}a$, $\chi_{\max}(\varphi_{\min}) = a$.

Таким образом, $\Phi_{12}(y)$ имеет следующий вид:

$$\Phi_{12}(y)=\begin{cases}\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right), & \text{åñëè } y\in(0,\,a),\\ \left(\arccos\dfrac{\sqrt{3}a}{2y},\,\dfrac{\pi}{6}+\arcsin\dfrac{\sqrt{3}a}{2y}\right), & \text{åñëè } y\in[a,\,a\sqrt{3}],\\ \phi, & \text{åñëè } y>a\sqrt{3}.\end{cases}$$

Теперь найдем область $\Phi_{13}(y)$. Аналогичными рассуждениями получаем следующую систему:

$$\begin{cases}a\cos\varphi\le p\le 2a\cos\varphi,\\ a\sin(\varphi+\pi/6)\le p\le 2a\sin(\varphi+\pi/6),\\ |\chi|=\dfrac{\sqrt{3}p}{2\sin(\varphi+\pi/6)\cos\varphi}.\end{cases}\tag{10}$$

Если $\cos\varphi\le\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi+\dfrac{1}{2}\cos\varphi$, то $tg\varphi\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Поэтому получаем $\varphi\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Пусть $\varphi\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$, тогда (10) примет следующий вид:

$$\begin{cases}a\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)\le p\le 2a\cos\varphi,\\ |\chi|=\dfrac{\sqrt{3}p}{2\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\varphi}.\end{cases}$$

Следовательно, $\dfrac{\sqrt{3}a}{2\cos\varphi}\le|\chi|\le\dfrac{\sqrt{3}a}{\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)}$. Если $\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$, то система (10) примет вид

$$\begin{cases}a\cos\varphi\le p\le 2a\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right),\\ |\chi|=\dfrac{\sqrt{3}p}{2\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\varphi}.\end{cases}$$

Следовательно, в этом случае $\dfrac{\sqrt{3}a}{2\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)} \le |\chi| \le \dfrac{\sqrt{3}a}{\cos\varphi}$. Окончательно, $\Phi_{13}(y)$ примет следующий вид:

$$\Phi_{13}(y)=\begin{cases} \phi, \quad \text{åñëè } y \le a \ \text{è} \ y > 2a, \\ \left(-\dfrac{\pi}{6}+\arcsin\dfrac{\sqrt{3}a}{2y},\ \arccos\dfrac{\sqrt{3}a}{2y}\right), \quad \text{åñëè } y \in [a,\, a\sqrt{3}], \\ \left(\arccos\dfrac{\sqrt{3}a}{y},\ -\dfrac{\pi}{6}+\arcsin\dfrac{\sqrt{3}a}{y}\right), \quad \text{åñëè } y \in (a\sqrt{3},\, 2a]. \end{cases}$$

Теперь остается подставить значения $\Phi_{12}(y)$ и $\Phi_{13}(y)$ в правую часть (8) и вычислить интегралы.

Следовательно, для функции распределения $F(y)$ длины хорды для правильного шестиугольника получаем:

$$F(y)=\begin{cases} 0, \ \text{åñëè} \quad y \le 0, \\ \dfrac{y}{a}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\right), \quad \text{åñëè} \quad 0 < y \le a, \\ 1+\dfrac{\pi y}{2a\sqrt{3}}-\dfrac{2y}{a\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{a\sqrt{3}}{2y}-\dfrac{\sqrt{4y^2-3a^2}}{2y}, \ \text{åñëè} \quad a < y < a\sqrt{3}, \\ 1+\dfrac{\pi y}{6a\sqrt{3}}+\dfrac{3}{2}\dfrac{\sqrt{y^2-3a^2}-a}{y}-\dfrac{y}{a\sqrt{3}}\arccos\dfrac{a\sqrt{3}}{y}, \ \text{åñëè} \quad a\sqrt{3} < y \le 2a, \\ 1, \ \text{åñëè} \quad y > 2a. \end{cases}$$

Плотность распределения $f(y)=F'(y)$ запишется в виде

$$f(y)=\begin{cases} 0, \ \text{åñëè} \quad y \notin (0,\, 2a], \\ \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\right), \quad \text{åñëè} \quad y \in (0,\, a], \\ \dfrac{\pi}{2a\sqrt{3}}-\dfrac{2}{a\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{a\sqrt{3}}{2y}+\dfrac{\sqrt{4y^2-3a^2}}{2y^2}, \ \text{åñëè} \quad y \in (a,\, a\sqrt{3}], \\ \dfrac{\pi}{6a\sqrt{3}}-\dfrac{1}{a\sqrt{3}}\arccos\dfrac{a\sqrt{3}}{y}+\dfrac{9a^2+3a\sqrt{y^2-3a^2}-2y^2}{2y^2\sqrt{y^2-3a^2}}, \text{åñëè} \ y \in (a\sqrt{3},\, 2a]. \end{cases}$$

Отметим, что функция распределения $F(y)$ непрерывна по y, а плотность распределения имеет разрывы для значений y, равных длинам стороны, высоты и диагонали шестиугольника.

Автор выражает благодарность профессору В.К. Оганяну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Поступила 23.10.2006

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ambartzumian R.V.** Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology. Chichester: John Wiley and Sons, 1982.
2. **Амбарцумян Р.В., Мекке Й., Штоян Д.** Введение в стохастическую геометрию. М.: Наука, 1990.
3. **Sulanke R.** – Math. Nach., 1961, v. 23, p. 51–74.
4. **Gille W.** – Exp. Techn. Phys., 1988, v. 36, p. 197–208.
5. **Агаронян Н.Г., Оганян В.К.** – Известия НАН Армении. Математика, 2005, т. 40, № 4, с. 43–56.
6. **Шилов Г.Е.** Математический анализ (второй специальный курс), 2-ое издание. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Հ. Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ԼԱՐԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՎԵՑԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Հոդվածում բերվում է լարի երկարության բաշխման ֆունկցիայի տարրական արտահայտություն կանոնավոր վեցանկյան համար: Այդ բանաձևը դուրս է բերված Պլեյելի նույնության δ-ֆորմալիզմի մեթոդով:

H. S. HARUTYUNYAN

CHORD LENGTH DISTRIBUTION FUNCTION FOR A REGULAR HEXAGON

Summary

In the paper elementary expression for the chord length distribution function of a regular hexagon is obtained. The formula is derived using δ-formalism in Pleijel identity.