ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2007 Естественные науки

Математика

УДК 517.9

Г. Г. СААКЯН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

В работе доказывается теорема сравнения для канонической системы Дирака, а также изучаются свойства нулей компонент его решений.

Рассматривается следующая каноническая система Дирака (см., напр., [1, 2])

$$\begin{cases} y_2' + p(t)y_1 = \lambda y_1, \\ -y_1' + r(t)y_2 = \lambda y_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $p(t), r(t)$ – действительнозначные непрерывные на отрезке $[\grave{a},b]$ функции, λ – действительный параметр.

Теория Штурма [3–5], известная для дифференциальных уравнений второго порядка вида $y'' + q(t)y = 0$, позволяет охарактеризовать свойства нулей решений таких уравнений. Целью настоящей работы является построение аналога теории Штурма для канонической системы Дирака вида (1). Исследования такого вида проводились в работах [6–8].

Предварительно рассмотрим следующую линейную однородную систему двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_2' + p(t)y_1 = 0, \\ -y_1' + r(t)y_2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $p(t), r(t) \in C[a,b]$.

Предположим, что $p(t)$ и $r(t)$ знакопостоянны на некотором отрезке $[a,b]$. Тогда для изучения свойств нулей решений системы (2) достаточно ограничиться рассмотрением двух случаев:

$$p(t) > 0,\ r(t) < 0\,, \tag{2а}$$

$$p(t) > 0,\ r(t) > 0\,. \tag{2б}$$

Действительно, рассмотрение случая $p(t) < 0,\ r(t) > 0$ будет аналогично случаю (2а) с той лишь разницей, что компоненты решения системы (2), а следовательно и их нули, просто поменяются местами. Случай $p(t) < 0,\ r(t) < 0$ сводится к случаю (2б), так как если умножить оба уравнения системы (2) на

(-1), затем обозначить $p_1(t) = -p(t), r_1(t) = -r(t)$ и произвести замену переменных, приняв $z_1 = -y_1$, $z_2 = -y_2$, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} z_2' + p_1(t) z_2 = 0, \\ -z_1' + r_1(t) z_1 = 0, \end{cases}$$

идентичную системе (2), в которой уже $p_1(t) > 0$, $r_1(t) > 0$. Заметим, что при этом нули функций y_i и z_i $(i = 1,2)$ будут совпадать.

Рассмотрим прежде всего несколько общих утверждений. Имеет место

Лемма 1. Компоненты всякого нетривиального решения системы (2) не могут иметь нуль в одной и той же точке.

Доказательство следует из единственности решения задачи Коши для системы (1).

Лемма 2. Компоненты всякого нетривиального решения системы (2) при $p(t) \cdot r(t) \neq 0$ могут иметь на отрезке $[a,b]$ не более конечного числа нулей, причем все нули простые.

Доказательство. Пусть $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (2). Предположим, что точка t_0 является кратным нулем для компоненты $y_1(t)$ и, следовательно, $y_1(t_0) = y_1'(t_0) = 0$. Тогда, так как $r(t_0) \neq 0$, из второго уравнения системы (2) найдем, что $y_2(t_0) = 0$, а это невозможно в силу леммы 1. Таким образом, нули компоненты $y_1(t)$ простые.

Предположим теперь, что $y_1(t)$ имеет на отрезке $[a,b]$ бесконечно много нулей: $t_1, t_2, ..., t_n, ...$. Тогда, по лемме Больцано–Вейерштрасса, из последовательности $\{t_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{t_{n_k}\} \to t_0$, $t_0 \in [a,b]$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$. Так как $y_1(t_n) = 0$, то в силу непрерывности $y_1(t)$ получим, что $y_1(t_0) = 0$. По теореме Ролля, на каждом интервале (t_n, t_{n+1}) найдется точка t_n^* такая, что $y_1'(t_n^*) = 0$. Так как $t_n^* \to t_0$, то в силу непрерывности $y_1'(t)$ найдем, что $y_1'(t_0) = 0$, а это невозможно, так как всякий нуль $y_1(t)$, согласно вышеприведенным рассуждениям, простой. Аналогично проводится доказательство и для компоненты $y_2(t)$. Лемма доказана.

Теорема 1. Если в системе (2) $p(t) \cdot r(t) \neq 0$ на отрезке $[a,b]$, то нуль одной компоненты всякого нетривиального решения системы (2) является точкой экстремума для другой компоненты того же решения.

Доказательство. Пусть $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (2), а t_0 – нуль компоненты $y_2(t)$, т.е. $y_2(t_0) = 0$, $t_0 \in (a,b)$.

Заметим, что $y_2(t)$ не может иметь один и тот же знак слева и справа от t_0, так как в этом случае точка t_0 окажется точкой экстремума для $y_2(t)$ и мы получим, что $y_2'(t_0)=0$. Но тогда из первого уравнения системы (2) будет следовать, что $y_1(t_0)=0$, что невозможно в силу леммы 1. Следовательно, $y_2(t)$ меняет свой знак при переходе через точку t_0. Но тогда, так как $r(t)$ знакопостоянна на отрезке $[a,b]$, из второго уравнения системы (2) будет следовать, что и y_1' при переходе через точку t_0 меняет свой знак, причем $y_1'(t_0)=r(t_0)y_2(t_0)=0$, а это значит, что точка t_0 является точкой экстремума для $y_1(t)$.

Аналогично доказывается, что нуль первой компоненты всякого нетривиального решения системы (2) является точкой экстремума для второй.

Теорема доказана.

Теорема 2. Если в системе (2) $p(t)\cdot r(t)\neq 0$ на отрезке $[a,b]$, то между всякими соседними нулями любой из компонент всякого нетривиального решения системы (2) находится ровно один нуль другой компоненты того же решения (нули компонент перемежаются).

Доказательство. Пусть $y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (2). Предположим, что t_1 и t_2 – соседние нули $y_2(t)$, т.е. $y_2(t_1)=y_2(t_2)=0$ и $y_2(t)\neq 0$ при $t\in(t_1,t_2)$ (аналогично проводится доказательство и в случае $y_1(t_1)=y_1(t_2)=0$). Заметим, что относительно функции $y_2(t)$ на отрезке $[a,b]$ имеют место условия теоремы Ролля. Тогда, применив ее, найдем, что внутри отрезка $[a,b]$ существует по крайней мере одна такая точка $t_0\in(a,b)$, что $y_2'(t_0)=0$. Но тогда из первого уравнения системы (2) будет следовать, что $y_1(t_0)=0$. Следовательно, $y_1(t)$ имеет по крайней мере один нуль на интервале (t_1,t_2).

Теперь предположим, что $y_1(t)$ имеет на интервале (t_1,t_2) более одного нуля, и пусть t_3 и t_4 ($t_1<t_3<t_4<t_2$) – два ее соседних нуля. Тогда, повторив вышеизложенные рассуждения, мы найдем, что $y_2(t)$ имеет на интервале (t_1,t_2) хотя бы один нуль, а это противоречит предположению, что t_1 и t_2 соседние нули $y_2(t)$. Следовательно, $y_1(t)$ имеет на отрезке (t_1,t_2) ровно один нуль.

Теорема доказана.

Приведем пример, иллюстрирующий утверждения теоремы 2.

Пример 1. Примем в системе (2) $p(t)=m^2$, $r(t)=n^2$, $m,n\in R$, $mn\neq 0$. В рассматриваемом случае $p(t)\cdot r(t)\neq 0$ на любом отрезке $[a,b]$, при этом система (2) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} y_2' + m^2 y_1 = 0, \\ -y_1' + n^2 y_2 = 0. \end{cases}$$

Дифференцируя по t первое уравнение и учитывая второе, найдем

$$y_2'' + m^2 y_1' = y_2'' + m^2 n^2 y_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение для полученного уравнения будет иметь вид

$$\lambda^2 + m^2 n^2 = 0,$$

откуда найдем $\lambda_{1,2} = \pm imn$. И, следовательно, общее решение рассматриваемой системы будет иметь вид

$$y_1(t) = A\sin(mnt + \varphi),$$

$$y_2(t) = \frac{Am}{n}\cos(mnt + \varphi),$$

где A и φ – произвольные постоянные.

Из структуры полученных решений следует, что нуль одной из компонент является точкой экстремума для другой, нули $y_2(t)$ *и* $y_1(t)$ перемежаются, причем на любом отрезке, длина которого больше или равна $\frac{\pi}{mn}$, компоненты решения имеют более одного нуля.

Теорема 3. Если в системе (2) $p(t)$ и $r(t)$ на отрезке $[a,b]$ знакопостоянны и имеют разные знаки, то наличие нуля на отрезке $[a,b]$ у одной из компонент нетривиального решения системы (2) исключает существование других нулей для обеих компонент на этом отрезке.

Доказательство. Пусть $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (2). Умножив первое уравнение системы (2) на $y_1(t)$, а второе на $(-y_2(t))$, затем сложив полученные уравнения, найдем

$$\left(y_1 y_2\right)' = -p(t)y_1^2 + r(t)y_2^2. \qquad (4)$$

Так как $p(t)$ и $r(t)$ на отрезке $[a,b]$ имеют разные знаки, то в полученном соотношении правая часть, а значит, и левая будут иметь при $t \in [a,b]$ всегда один и тот же знак. А это означает, что функция $y_1(t) \cdot y_2(t)$ при $t \in [a,b]$ будет либо строго возрастающей (при $p(t) < 0$ и $r(t) > 0$), либо строго убывающей (при $p(t) > 0$ и $r(t) < 0$). Отсюда следует, что $y_1(t) \cdot y_2(t)$ может иметь нуль на отрезке $[a,b]$ только в одной точке. Теорема доказана.

Следствие. Если в системе (2) $p(t)$ и $r(t)$ на отрезке $[a,b]$ знакопостоянны и имеют разные знаки, то ни одна из компонент всякого нетривиального решения системы (2) не может иметь на отрезке $[a,b]$ более одного нуля.

Проиллюстрируем утверждение теоремы 3 на следующем примере.

Пример 2. Предположим, что в системе (2) $p(t) = -m^2$, $r(t) = n^2$, $m,n \in R$, $mn \neq 0$. В рассматриваемом случае $p(t)$ и $r(t)$ знакопостоянны на любом отрезке $[a,b]$ и имеют разные знаки. Система (2) при этом будет иметь вид

$$\begin{cases} y_2' - m^2 y_1 = 0, \\ -y_1' + n^2 y_1 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему методом, использованным в примере 1, легко найти, что общее решение системы в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$y_1(t) = \frac{n}{m}\left(-C_1 e^{mnt} + C_2 e^{-mnt}\right),$$

$$y_2(t) = C_1 e^{mnt} + C_2 e^{-mnt},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Нетрудно показать, что и в этом случае нуль любой компоненты всякого нетривиального решения является точкой экстремума для другой компоненты, причем каждая из компонент всякого нетривиального решения системы может иметь нуль на всей оси не более чем в одной точке.

Рассмотрим теперь следующие линейные однородные системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_2' + p_1(t) y_1 = 0, \\ -y_1' + r_1(t) y_2 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} y_2' + p_2(t) y_1 = 0, \\ -y_1' + r_2(t) y_2 = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $p_i(t),\, r_i(t) \in C[a,b]$ $\left(i = 1,2\right)$.

Имеет место

Теорема 4 (сравнения). Пусть $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ и $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – соответственно нетривиальные решения систем (5) и (6), удовлетворяющие в точке a одним и тем же начальным условиям

$$u_1(a) = v_1(a),\ \ u_2(a) = v_2(a), \tag{7}$$

и пусть при $t \in [a,b]$

$$r_2(t) \ge r_1(t) > 0,\ \ p_2(t) \ge p_1(t) > 0. \tag{8}$$

Тогда если одна из компонент $u(t)$ в открытом отрезке $(a,b]$ имеет m нулей, то одна из компонент $v(t)$ имеет в том же $(a,b]$ не менее ℓ нулей, причем k-й нуль компоненты $v(t)$ не больше k-го нуля компоненты $u(t)$.

Доказательство. Предположим, что $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ и $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – соответственно нетривиальные решения систем (5) и (6). Тогда будем иметь следующие системы тождеств:

$$\begin{cases} u_2' + p_1(t) u_1 \equiv 0, \\ -u_1' + r_1(t) u_2 \equiv 0, \end{cases} \tag{9}$$

и

$$\begin{cases} v_2' + p_2(t)v_1 \equiv 0, \\ -v_1' + r_2(t)v_2 \equiv 0. \end{cases} \tag{10}$$

Пусть t_1 – нуль компонент $u(t)$, наиболее близкий к a и отличный от a. Такой нуль всегда существует, так как, согласно лемме 2, нули компонент $u(t)$ простые и изолированные. Не теряя общности рассуждений, предположим, что t_1 – нуль $u_2(t)$. Так как $u_2(t)$ по предположению не имеет нулей на (a,t_1), то она будет сохранять свой знак на (a,t_1). Предположим, что

$$u_2(t) > 0 \tag{11}$$

(доказательство в случае $u_2(t) < 0$ проводится аналогично). Тогда нетрудно показать, что при этом будем иметь $u_2(a) > 0$ и $u_2'(t) < 0$ при $t \in (a,t_1)$. Действительно, в случае $u_2(a) = 0$ по теореме Ролля найдем, что на отрезке $[a,t_1]$ найдется точка t_0 такая, что $u_2'(t_0) = 0$. Но тогда из первого уравнения системы (9) найдем, что $u_1(t_0) = 0$, а это невозможно в силу предположения относительно точки t_1. К аналогичному противоречию придем и в том случае, если предположим, что на (a,t_1) $u_2'(t)$ меняет свой знак.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что одна из компонент $v(t)$ имеет в интервале $(a,t_1]$ по крайней мере один нуль. Очевидно, что если $v_1(t_1) \cdot v_2(t_1) = 0$, то теорема доказана. Поэтому рассмотрим случай, когда $v_1(t_1) \cdot v_2(t_1) \neq 0$, и предположим обратное, т.е. $v_1(t) \cdot v_2(t) \neq 0$ при $t \in (a,t_1]$. Тогда $v_1(t)$ и $v_2(t)$ будут сохранять свои знаки на $(a,t_1]$. И так как $v_2(a) = u_2(a) > 0$, то, следовательно, при $t \in (a,t_1)$ будем иметь

$$v_2(t) > 0. \tag{12}$$

Тогда в силу непрерывности $v_2(t)$ найдем, что

$$v_2(t_1) > 0. \tag{13}$$

Так как при $t \in (a,t_1)$ $u_2'(t) < 0$ и $p_1(t) > 0$, то из первого тождества системы (9) будет следовать, что на интервале (a,t_1)

$$u_1(t) > 0. \tag{14}$$

Тогда получим, что

$$u_1(a) \geq 0,\ u_1(t_1) > 0 \tag{15}$$

(так как $u_2(t_1) = 0$, то в силу леммы 1 $u_1(t_1)$ не может равняться нулю). И так как $v_1(t)$ сохраняет свой знак на (a,t_1) и $v_1(a) = u_1(a) \geq 0$, то получим, что на интервале (a,t_1)

$$v_1(t) > 0. \tag{16}$$

Тогда, учитывая непрерывность $v_1(t)$, будем иметь, что

$$v_1(t_1) > 0. \tag{17}$$

Далее, умножив первые тождества систем (9) и (10) соответственно на $(-v_1)$ и u_1, а вторые на $(-v_2)$ и u_2, затем сложив полученные тождества, получим

$$\left(u_1v_2 - v_1u_2\right)' \equiv \left(p_1(t) - p_2(t)\right)u_1v_1 + \left(r_1(t) - r_2(t)\right)u_2v_2 . \qquad (18)$$

Проинтегрировав тождество (18) в пределах от a до t_1, учитывая условия (7) и то, что $u_2(t_1) = 0$, будем иметь

$$u_1(t_1)\cdot v_2(t_1) \equiv \int_a^{t_1}\left(p_1(t) - p_2(t)\right)u_1(t)v_1(t)dt + \int_a^{t_1}\left(r_1(t) - r_2(t)\right)u_2(t)v_2(t)dt . \quad (19)$$

В последнем тождестве левая часть, согласно (13) и (15), будет положительной, тогда как в силу (8) и условий (11), (12), (14) и (16) правая часть неположительна. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Доказанная теорема сравнения позволяет нам, зная свойства нулей решений для системы (2) с постоянными коэффициентами, перенести их на такие же системы с переменными, но знакопостоянными коэффициентами. Действительно, предположим , что на отрезке $[a,b]$ для системы (2) имеет место случай (2б), и рассмотрим параллельно с системой (2) систему

$$\begin{cases} y_2' + m^2 y_1 = 0, \\ -y_1' + n^2 y_2 = 0, \end{cases} \qquad (20)$$

где

$$m^2 = \min_{a\le t\le b} p(t), \quad n^2 = \min_{a\le t\le b} r(t) . \qquad (21)$$

Примем

$$p_1(t) \equiv m^2,\ r_1(t) \equiv n^2,\ p_2(t) \equiv p(t),\ r_2(t) \equiv r(t). \qquad (22)$$

Если теперь предположить, что $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ и $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – соответственно нетривиальные решения систем (2) и (20), удовлетворяющие условиям $u_1(a) = v_1(a),\ u_2(a) = v_2(a)$, то очевидно, что для этих систем с учетом (21) и (22) имеют место условия теоремы сравнения. Применив ее, получим, что если одна из компонент нетривиального решения системы (20) $u(t)$ в открытом отрезке $(a,b]$ имеет ℓ нулей, то одна из компонент нетривиального решения системы (2) $v(t)$ имеет в том же $(a,b]$ не менее ℓ нулей, причем k-й нуль компоненты $v(t)$ не больше k-го нуля компоненты $u(t)$. И так как (см. пример 1) на любом отрезке, длина которого больше или равна $\frac{\pi}{mn}$, компоненты решения системы (20) имеют более одного нуля, то одна из компонент решения системы (2) будет иметь не меньше одного нуля. Таким образом, верна

Теорема 5. Если в системе (2) $p(t)$ и $r(t)$ на отрезке $[a,b]$ положительны и длина отрезка $[a,b]$ больше или равна $\frac{\pi}{mn}$, где

$$m^2 = \min_{a \le t \le b} p(t), \quad n^2 = \min_{a \le t \le b} r(t) \ ,$$

то существует нетривиальное решение системы (2) такое, что одна из его компонент имеет на этом отрезке более одного нуля.

Так как в случае $p(t) < 0,\ r(t) < 0$ свойства нулей будут такими же, как и в случае $p(t) > 0,\ r(t) > 0$, то теорема 5 будет справедлива и в случае $p(t) < 0,\ r(t) < 0$.

Вернемся к рассмотрению системы (1), записав ее в виде

$$\begin{cases} y_2' + \big(p(t) - \lambda\big) y_1 = 0, \\ -y_1' + \big(r(t) - \lambda\big) y_2 = 0, \end{cases} \tag{23}$$

и пусть

$$M = \max_{a \le t \le b} p(t), \quad n = \min_{a \le t \le b} r(t). \tag{24}$$

Предположим теперь, что на отрезке $[a,b]$ для системы (23) имеет место случай (2а) (аналогично рассматривается и случай (2б)). Тогда из (24) будет следовать, что $M > n$. Далее, рассмотрим относительно параметра λ следующие случаи: $\lambda < n$, $\lambda > M$ (рассмотрение случая $n \le \lambda \le M$ требует дополнительных разъяснений). В этих случаях $p(t) - \lambda$ и $r(t) - \lambda$ будут иметь одинаковые знаки. Тогда, согласно теореме 5, если длина отрезка $[a,b]$ будет больше или равна $\dfrac{\pi}{\sqrt{(M-\lambda)(n-\lambda)}}$, то существует нетривиальное решение системы (23) такое, что одна из его компонент будет иметь на отрезке $[a,b]$ более одного нуля, причем, согласно теореме 2, нули компонент этого решения будут перемежаться, а нуль любой из компонент, по теореме 1, будет являться точкой экстремума для другой.

АрГУ, ЕГУ

Поступила 09.11.2006

ЛИТЕРАТУРА

1. **Левитан Б.М., Саргсян И.Г.** Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
2. **Костюченко А.Г., Саргсян И.Г.** Распределение собственных значений. М.: Наука, 1979.
3. **Федорюк М.В.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
4. **Ղազարյան Հ.Գ., Հովհաննիսյան Ա.Հ., Հարությունյան Տ.Ն., Կարապետյան Գ.Ա.** Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ: Եր., 2002.
5. **Сансоне Дж.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. М.: ИЛ, 1953.
6. **Якубович В.А., Старжинский Б.М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М.: Наука, 1972.
7. **Langer H., Textopus B.** – Int. Equat. And Oper. Theory, 1982, v. 5, p. 208–242.
8. **Фолиадова Е.В.** Осцилляционная теорема для системы Дирака с параметром в краевом условии. Функциональный анализ. Спектральная теория. Межвузовский сборник научных трудов. Ульяновск, 1984, с. 111–122.

Գ. Հ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ԴԻՐԱԿԻ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցվում է համեմատման թեորեմ Դիրակի կանոնական համակարգի համար և դիտարկվում են նրա լուծումների կոմպոնենտների զրոների հատկությունները:

G. H. SAHAKYAN

ABOUT SOME PROPERTIES OF SOLUTIONS FOR DIRAC'S CANONIC SYSTEM

Summary

The work considers the comparison theorem for Dirac's canonic system and some properties of zeros of its solution's components.