ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2007 Естественные науки

Математика

УДК 519.21

А. З. АРАКЕЛЯН

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОГО ТИПА ИГРОВЫХ ЛОТЕРЕЙ

Рассмотрена математическая модель разыгрываемых в Армении игровых лотерей, включающих в названиях слова «честная», «семейная» и др. Получено среднее значение выигрыша одной лотереи и решена экстремальная задача для выигрыша.

§1. Введение. В последние годы в Армении стали разыгрываться специфические лотереи, в названиях которых содержатся слова «честная», «семейная» и др. Специфика их в том, что каждый лотерейный билет предоставляет игроку одинаковые возможности выигрыша, в отличие от предшествующих лотерей, в которых различные лотерейные билеты содержали неравные возможности выигрышей.

Опишем структуру трех таких лотерей.

1. *Семейная честная игра*. Стоимость билета 400 др.

Задана таблица из 9 строк и 2 столбцов. Перенумеруем строки снизу вверх числами $\overline{1,9}$. Один элемент из двух в каждой строке содержит выигрыш. Обозначим выигрыш в k-ой строке через a_k (в драмах): $a_1 = 400$, $a_2 = 800$, $a_3 = 1\,600$, $a_4 = 3\,200$, $a_5 = 6\,400$, $a_6 = 12\,500$, $a_7 = 25\,000$, $a_8 = 50\,000$, $a_9 = 100\,000$.

Таблица находится под защитным слоем. Игрок очищает лишь одну ячейку (элемент) каждой строки снизу вверх. При очистке k-ой строки в случае неудачи игра завершается. В случае удачи игрок либо берет выигрыш a_k и завершает игру, либо отказывается от выигрыша и переходит к ($k+1$)-ой строке. Игра с очисткой ячейки последней строки завершается.

В последней строке при неудаче игрок получает утешительный приз 10 000 др.

2. *Семейный честный автомобиль*. Стоимость билета 500 др.

Задана таблица 9×3. Игра аналогична предыдущей. Разница в том, что каждая строка содержит выигрыш в одной ячейке из трех: $a_1 = 1\,000$, $a_2 = 2\,500$, $a_3 = 6\,500$, $a_4 = 20\,000$, $a_5 = 60\,000$, $a_6 = 150\,000$, $a_7 = 500\,000$, $a_8 = 1\,000\,000$, $a_9 = 3\,800\,000$ (автомобиль «Нива»). В случае неудачи игрока в последних трех строках предоставляется утешительный приз b_k в k-ой строке: $b_7 = 25\ 000$, $b_8 = 50\ 000$, $b_9 = 250\ 000$.

3. *Семейная честная «Нива»*. Стоимость билета 500 др.

Задана таблица из двух подтаблиц: 9×2 – нижняя, 3×3 – верхняя. Перенумеруем в таблице строки снизу вверх числами $\overline{1,12}$. Игра аналогична предыдущим. В нижней подтаблице каждая строка содержит выигрыш в одной ячейке из двух, а в верхней – в одной ячейке из трех: $a_1 = 500, a_2 = 1\ 000$, $a_3 = 2\ 000$, $a_4 = 4\ 000$, $a_5 = 8\ 000$, $a_6 = 16\ 000$, $a_7 = 32\ 000$, $a_8 = 70\ 000$, $a_9 = 150\ 000$, $a_{10} = 450\ 000$, $a_{11} = 1\ 350\ 000$ $a_{12} = 3\ 800\ 000$ (автомобиль «Нива»). Утешительный приз в случае неудачи игрока начинается с шестой строки, т.е. в строках с номерами $\overline{6,12}$: $b_6 = 5\ 000$, $b_7 = 10\ 000$, $b_8 = 15\ 000$, $b_9 = 25\ 000$, $b_{10} = 50\ 000$, $b_{11} = 100\ 000$, $b_{12} = 250\ 000$.

В отличие от первых двух игровых лотерей, при неудаче в строках $\overline{6,12}$ утешительный приз достается игроку не автоматически. Игрок лишь получает право участия в дополнительной игре, которая представляет собой строку из 6 ячеек под защитным слоем, из которых 3 помечены крестиками, а 3 – нулями. Игрок очищает три ячейки из шести и получает утешительный приз при обнаружении трех крестиков в трех очищенных ячейках.

В настоящей статье изучена общая математическая модель одной игровой лотереи типа вышеописанных.

§2. Математическая модель. Рассмотрим следующее конечное (дискретное) пространство *элементарных событий* $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n+m} \Omega_k$, где n и m – положительные целые числа, а $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n+m}$ – попарно непересекающиеся подмножества Ω [1–3]. Полагаем $\Omega_k = (\omega_{k,1}, \omega_{k,2})$ при $k = \overline{1,n}$ и $\Omega_k = (\omega_{k,1}$, $\omega_{k,2}$, $\omega_{k,3})$ при $k = \overline{n+1, n+m}$. Пространство элементарных событий Ω приобретает вид $\Omega = (\omega_{1,1}, \omega_{1,2}; \ldots; \omega_{n,1}, \omega_{n,2}; \omega_{n+1,1}, \omega_{n+1,2}, \omega_{n+1,3}; \ldots; \omega_{n+m,1}, \omega_{n+m,2}, \omega_{n+m,3})$.

Определим вероятности $P(\omega_{i,j})$, где P – знак вероятности. Предварительно зададим вероятности p_k, $k = \overline{1, n+m-1}$, и g_r, $r = \overline{n+1, n+m}$, а также целые числа $s_u > 1$, $u = \overline{1, n+m}$.

Обозначим $P_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, $k = \overline{1, n+m-1}$, $S_u = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_u$, $u = \overline{1, n+m}$.

С помощью введенных величин записываем $P(\omega_{i,j})$. Именно: при $k = \overline{1,n}$, $p_0 = P_0 = 1$, $s_0 = 1$

$$\begin{cases} P(\omega_{k,1}) = \dfrac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{k-1}} \cdot \dfrac{1 - p_k}{s_k} = \dfrac{P_{k-1}}{S_k}(1 - p_k), \\ P(\omega_{k,2}) = \dfrac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{k-1}} \cdot \dfrac{s_k - 1}{s_k} = \dfrac{P_{k-1}}{S_k}(s_k - 1); \end{cases} \tag{2.1}$$

при $k=\overline{n+1,n+m}$ с ограничением $p_{n+m}=0$

$$\begin{cases} P(\omega_{k,1}) = \dfrac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{k-1}} \cdot \dfrac{1-p_k}{s_k} = \dfrac{P_{k-1}}{S_k}(1-p_k), \\ P(\omega_{k,2}) = \dfrac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{k-1}} \cdot \dfrac{s_k-1}{s_k} g_k = \dfrac{P_{k-1}}{S_k}(s_k-1)g_k, \\ P(\omega_{k,3}) = \dfrac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{k-1}} \cdot \dfrac{s_k-1}{s_k}(1-g_k) = \dfrac{P_{k-1}}{S_k}(s_k-1)(1-g_k). \end{cases} \tag{2.2}$$

Рассмотрим положительные числа a_k, $k=\overline{1,n+m}$, и $b_r, r=\overline{n+1,n+m}$, где $0<a_1<a_2<\ldots<a_{n+m}$ и $0<b_{n+1}<b_{n+2}<\ldots<b_{n+m}$, и определим случайную величину $\xi=\xi(\omega_{i,j})$ следующим образом: при $k=\overline{1,n}$ $\xi(\omega_{k,1})=a_k$, $\xi(\omega_{k,2})=0$; при $k=\overline{n+1,m}$ $\xi(\omega_{k,1})=a_k$, $\xi(\omega_{k,2})=b_k$, $\xi(\omega_{k,3})=0$.

Приведем интерпретацию вышеописанной модели в терминах игровых лотерей. Задана таблица из $n+m$ строк, перенумерованных снизу вверх числами $1,2,\ldots n+m$. k-ая строка содержит $s_k \geq 2$ ячеек, из которых одна содержит выигрыш a_k, где $0<a_1<a_2<\ldots<a_{n+m}$. Таблица находится под защитным слоем.

Правила игры. Игра начинается с нижней строки, в которой очищается одна из s_1 ячеек от защитного слоя. В случае проигрыша игра завершается. В случае выигрыша игрок может забрать выигрыш и завершить игру или, отказавшись от выигрыша, перейти ко второй строке. Добравшись до k-ой строки, $k=\overline{2,n+m}$, игрок имеет право очистить одну из s_k ячеек от защитного слоя. В случае проигрыша игра завершается. В случае выигрыша игрок может забрать лишь выигрыш k-ой строки a_k и завершить игру или, отказавшись от выигрыша, при $k<n+m$ перейти к $(k+1)$-ой строке. Если $k=n+m$, то игра завершается после очистки одной ячейки $(n+m)$-ой строки. В l-ой строке, $l=\overline{n+1,n+m}$, предусмотрен утешительный приз b_l, который в случае проигрыша игрок, завершая игру, получает с вероятностью g_l или не получает с вероятностью $1-g_l$. Здесь $0<b_{n+1}<b_{n+2}<\ldots<b_{n+m}$.

Элементарные события $\omega_{k,i}$ относятся к k-ой строке: $\omega_{k,1}$ при $k=\overline{1,n+m}$ означает выигрыш в k-ой строке, взятие выигрыша и завершение игры; $\omega_{k,2}$ при $k=\overline{1,n}$ означает проигрыш в k-ой строке и завершение игры; $\omega_{k,2}$ при $k=\overline{n+1,n+m}$ означает проигрыш в k-ой строке и получение утешительного приза b_k; $\omega_{k,3}$ при $k=n+1,n+m$ – проигрыш игрока в k-ой строке и неполучение утешительного приза.

$p_k \in [0,1]$, $k=\overline{1,n+m-1}$, – условная вероятность перехода к $(k+1)$-ой строке при условии, что игрок дошел до k-ой строки и выиграл. ξ есть случайный выигрыш обладателя одной лотереи.

В «Семейной честной игре» $n=8,\ m=1,\ g_9=1,\ s_k=2,\ k=\overline{1,9}$; в «Семейном честном автомобиле» $n=6,\ m=3,\ g_7=g_8=g_9=1,\ s_k=3,\ k=\overline{1,9}$; в «Семейной честной Ниве» $n=5, m=7,\ g_k=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20},\ k=\overline{6,12},\quad s_u=2,$ $u=\overline{1,9},\ s_v=3, v=\overline{10,12}$.

§3. Средний выигрыш одной игровой лотереи. Найдем средний выигрыш одной игровой лотереи, т.е. математическое ожидание $M\xi$ случайной величины ξ. Согласно (2.1), (2,2),

$$M\xi=\sum_{k=1}^{n}a_kP(\omega_{k,1})+\sum_{k=n+1}^{n+m}(a_kP(\omega_{k,1})+b_kP(\omega_{k,2}))=\sum_{k=1}^{n+m}a_k(1-p_k)\frac{P_{k-1}}{S_k}+$$
$$+\sum_{k=n+1}^{n+m}b_kg_k\frac{P_{k-1}}{S_k}(s_k-1)=\sum_{k=1}^{n+m}a_k\frac{P_{k-1}}{S_k}-\sum_{k=1}^{n+m}a_k\frac{P_k}{S_k}+\sum_{k=n+1}^{n+m}b_kg_k(s_k-1)\frac{P_{k-1}}{S_k}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{P_{k-1}}{S_k}+\sum_{k=n+1}^{n+m}(a_k+b_kg_k(s_k-1))\frac{P_{k-1}}{S_k}-\sum_{k=1}^{n+m-1}a_ks_{k+1}\frac{P_k}{S_{k+1}}=$$
$$=\frac{a_1}{s_1}+\sum_{k=1}^{n}(a_k-s_ka_{k-1})\frac{P_{k-1}}{S_k}+\sum_{k=n+1}^{n+m}(a_k-s_ka_{k-1}+b_kg_k(s_k-1))\frac{P_{k-1}}{S_k}.$$

Таким образом, полагая при $k=\overline{1,n+m}$

$$c_k=\begin{cases}\dfrac{a_1}{s_1},\ k=1,\\[2mm] \dfrac{a_k-s_ka_{k-1}}{S_k},\ k=\overline{2,n},\\[2mm] \dfrac{a_k-s_ka_{k-1}+b_kg_k(s_k-1)}{S_k},\ k=\overline{n+1,n+m},\end{cases}\tag{3.1}$$

приходим к следующей формуле:

$$M\xi=\sum_{k=1}^{n+m}c_kP_{k-1},\tag{3.2}$$

где положительная константа c_1 и действительные константы $c_2,c_3,\dots,c_{n+m}$ определены равенством (3.1), $P_0=1,\ P_k=p_1\cdot\ldots\cdot p_k,\ k=\overline{1,n+m-1}$.

В реальной ситуации распорядитель игры определяет величины: n, m, цену лотереи, число ячеек $s_k\geq 2$ и выигрыш a_k в k-ой строке таблицы, величину утешительного приза b_r и вероятность его получения g_r в r-ой строке. В то же время, ему *неизвестны* вероятности $p_1,p_2,\dots,p_{n+m-1}$, хотя , например,в «Семейной честной Ниве» $p_1=1$, поскольку для обладателя лотереи в случае выигрыша в первой строке таблицы очевидна целесообразность продолжения игры.

Частичная информация о вероятностях $p_1, p_2, ..., p_{n+m-1}$ может быть получена *статистически* после обработки предъявленных для получения выигрышей лотерейных билетов проданного тиража. Однако картина бывает неполной, так как не предъявляются лотерейные билеты, по которым игрок не получает выигрыша, и неясно на какой строке таблицы игрок проиграл.

Выборочный опрос, участвующих в игре нецелесообразен, поскольку их психология отличается от психологии игрока, дошедшего до k-ой строки таблицы.

Таким образом,

$$M\xi = M\xi(\vec{p}_{n+m-1}) = c_1 + \sum_{k=2}^{n+m} c_k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{k-1}, \qquad (3.3)$$

где $\vec{p}_{n+m-1} = (p_1, p_2, ..., p_{n+m-1})$ – вектор вероятностей $p_1, p_2, ..., p_{n+m-1}$.

§4. Точные границы среднего выигрыша.

Задача. В классе векторов $\left\{\vec{p}_{n+m-1} : p_k \in [0,1],\ k = \overline{1, n+m-1}\right\}$ найти

$$M\xi(\vec{p}_{n+m-1}) \to extremum. \qquad (4.1)$$

Алгоритм решения экстремальной задачи (4.1). Если в (3.3) $c_k = 0$ при некотором $k = \overline{2, n+m}$, то, очевидно, можно положить $p_{k-1} = 1$. Поэтому, в частности, если $c_2 = c_3 = ... = c_{n+m} = 0$, то

$$\max_{\vec{p}_{n+m-1}} M\xi = \min_{\vec{p}_{n+m-1}} M\xi = c_1. \qquad (4.2)$$

Шаг 1. Проверяем $c_2^2 + c_3^2 + ... + c_{n+m}^2 > 0$. Если условие не выполнено, то справедливо (4.2). Если условие выполнено , то таблицу

$$\begin{array}{c|c|c|c} c_2 & c_3 & ... & c_{n+m} \\ \hline p_1 & p_2 & ... & p_{n+m-1} \end{array} \qquad (4.3)$$

заменяем на таблицу

$$\begin{array}{c|c|c|c} c'_2 & c'_3 & ... & c'_{n'+m'} \\ \hline p'_1 & p'_2 & ... & p'_{n'+m'} \end{array}. \qquad (4.4)$$

Здесь $n'(m')$ равно разности $n(m)$ и числа нулей среди $c_2, c_3, ..., c_n$ (среди $c_{n+1}, c_{n+2}, ..., c_{n+m}$); $c'_2, c'_3, ..., c'_{m'+n'}$ имеет нумерацию $c_2, c_3, ..., c_{n+m}$ без нулевых членов; если c'_i в (4.4) соответствует c_j в (4.3), то полагаем $p'_i = p_j$. Очевидно, $n' + m' > 0$.

Задача (4.1) сведена к той же задаче меньшей размерности.

Для удобства опускаем штрихи.

Задача минимума сводится к задаче максимума, если c_i заменить в (3.3) на $(-c_i)$, $i = \overline{1, n+m}$, и после решения взять результат со знаком минус.

Для нахождения максимума рассмотрим взаимоисключающие ситуации.

1. $c_i > 0, i = \overline{2, n+m}$; 2. Найдется индекс $i = \overline{2, n+m}$ с $c_i < 0$.

Шаг 2. Проверяем условие 1. Если условие выполнено, то вычисляем

$$\max_{p_{n+m-1}} M\xi = \sum_{k=1}^{n+m} c_k \quad \text{и} \quad \min_{p_{n+m-1}} M\xi = c_1 .$$

Процедура решения задачи (4.1) завершена.

Шаг 3. Проверяем условие 2. Если условие выполнено, то образуем суммы

$$c_{n+m}, c_{n+m} + c_{n+m-1}, \ldots, \sum_{k=1}^{n+m} c_k . \tag{4.5}$$

Проверяем условие: последовательность (4.5) содержит *неположительные* члены. Пусть k – максимальный индекс, для которого

$$\sum_{k=1}^{n+m} c_k \le 0, \ \sum_{i=j}^{n+m} c_i > 0, \ j = \overline{k+1, n+m} .$$

Тогда полагаем $p_{k-1} = 0$, и задача сводится к той же задаче меньшей размерности.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Поступила 14.11.2006

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гнеденко Б.В.** Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969.
2. **Боровков А.А.** Теория вероятностей. М.: Наука, 1979.
3. **Հարությունյան Ե., Ղազանչյան Տ., Մեսրոպյան Ն.** և ուրիշներ, Հավանականության և կիրառական վիճակագրություն: Եր., ՀՀ ԳԱԱ «Գիտություն» հրատ., 2000:

Ա. Զ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ՄԻ ՏԻՊԻ ՎԻՃԱԿԱԽԱՂԻ ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼ

Ամփոփում

Դիտարկված է վիճակախաղերի մաթեմատիկական մոդել, որն ընդգրկում է Հայաստանում խաղարկվող այն վիճակախաղերը, որոնց անվանումներում կան «ազնիվ», «ընտանեկան» և այլ բառեր: Ստացված է մի վիճակախաղի շահույթի միջին արժեքը և շահույթի համար լուծված է էքստրեմալ խնդիր:

A. Z. ARAKELYAN

THE STOCHASTIC PARAMETRIC MODEL OF ONE TYPE OF LOTTERIES

Summary

The mathematical model of lotteries that include several ones in Armenia under the names «family», «honest» ets. is considered. The mean value of profit of one lottery is obtained and the corresponding extremal problem is solved.