ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2007 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

А. Р. ВОСКАНЯН

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН ЛЯВА В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ, СОДЕРЖАЩЕМ БЕСКОНЕЧНОЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЕ УПРУГОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается дифракция волн Лява от границы раздела двух полубесконечных упругих слоев, находящихся в упругом пространстве. Задача сводится к решению функционального уравнения Винера–Хопфа на действительной оси относительно трансформантов Фурье амплитуд контактных напряжений. Получены асимптотические формулы для амплитуд контактных напряжений в дальней зоне и в окрестности линии раздела тонких слоев.

Рассмотрим упругое пространство, отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$, содержащее кусочно-однородное упругое бесконечное включение в виде полубесконечных слоев с малой толщиной $2h$, занимающих области $\Omega_1(-\infty < x \le 0,\ |y| < h,\ |z| < \infty)$ и $\Omega_2(0 \le x < \infty,\ |y| < h,\ |z| < \infty)$ (рис. 1).

Для упругого пространства и слоев, совершающих установившиеся сдвиговые колебания, уравнения движения в амплитудах запишутся в виде [1]:

$$\Delta W(x,y) + k^2 W(x,y) = 0, \quad \Omega(|y| > h, |x| < \infty, |z| < \infty), \tag{1}$$

$$\frac{d^2 V_1^-(x)}{dx^2} + k_1^2 V_1^-(x) = -\delta'(x)V(0) - \frac{X}{\mu_1}\delta(x) - \frac{q_1^-(x)}{h\mu_1}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

$$\frac{d^2 V_2^+(x)}{dx^2} + k_2^2 V_2^+(x) = \delta'(x)V(0) + \frac{X}{\mu_2}\delta(x) - \frac{q_2^+(x)}{h\mu_2}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{3}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$; $k_1^2 = \omega^2 / c_1^2$, $k_2^2 = \omega^2 / c_2^2$, $k^2 = \omega^2 / c^2$ – соответственно волновые числа левого и правого слоев и пространства; $c_1 = \sqrt{\mu_1 / \rho_1}$, $c_2 = \sqrt{\mu_2 / \rho_2}$, $c = \sqrt{\mu / \rho}$ – соответственно скорости распространения сдвиговых волн в левом и правом слоях и в пространстве; $\mu_1, \rho_1, \mu_2, \rho_2$ –

модули сдвига и плотности материала в левом и правом слоях соответственно; $\delta(x)$ – функция Дирака, $\delta'(x)=\frac{d}{dx}(\delta(x))$; $W(x,y)$ – амплитуда перемещения точек упругого пространства; $V_1^-(x)=V_1(x)\theta(-x)$, $V_2^+(x)=V_2(x)\theta(x)$, $q_1^-(x)=q_1(x)\theta(-x)$, $q_2^+(x)=q_2(x)\theta(x)$, где $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $V_1(x)$ – среднее значение амплитуды перемещения левого слоя, $V_2(x)$ – правого слоя, $q_1(x)$, $q_2(x)$ – амплитуды контактных напряжений при $x<0$ и $x>0$ соответственно, $V(0), X$ – постоянные, подлежащие определению.

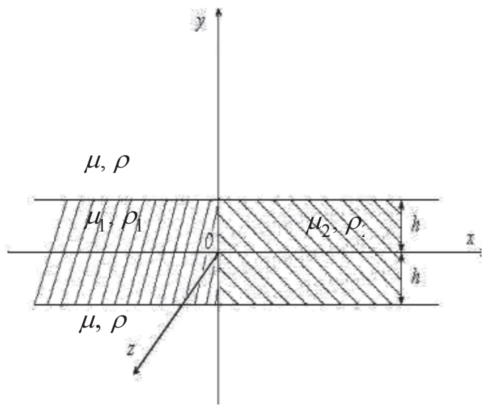

Рис. 1.

Контактные условия имеют вид:

$$W(x,\pm h)=V_1^-(x)+V_2^+(x), \qquad -\infty<x<\infty, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}\right|_{y=+h}-\left.\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}\right|_{y=-h}=\frac{2}{\mu}(q_1^-(x)+q_2^+(x)), \qquad -\infty<x<\infty, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} V_1(-0)=V_2(+0)=V(0), \\ \mu_1\left.\frac{dV_1(x)}{dx}\right|_{x=-0}=\mu_2\left.\frac{dV_2(x)}{dx}\right|_{x=+0}=X. \end{gathered} \tag{6}$$

Как известно [2, 3], при $k<k_1$, $k<k_2$ в пространстве со слоем возникают поверхностные волны Лява. Исходя из этого, рассмотрим задачу о дифракции волны Лява, падающей из минус бесконечности на линию раздела слоев с амплитудой $u(x,y)=e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k^2}|y|}\cdot e^{i\sigma_1 x}$, где σ_1 удовлетворяет дисперсионному уравнению [1, 4–6]:

$$L_1(\sigma)=\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}-h\mu_1\left(k_1^2-\sigma^2\right)=0,$$

$$\sigma_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2k_1^2+\lambda_1^2-\lambda_1\sqrt{\lambda_1^2+4\left(k_1^2-k^2\right)}}, \qquad k<\sigma_1<k_1, \quad \lambda_1=\frac{\mu}{\mu_1 h}.$$

Для решения задачи применяем действительное преобразование Фурье к уравнениям (1)–(3) и получаем

$$\frac{d^2\overline{W}(\sigma,y)}{dy^2}-\gamma^2\overline{W}(\sigma,y)=0, \quad \gamma^2(\sigma)=\sigma^2-k^2, \tag{7}$$

$$\overline{V}_1^-(\sigma)=\frac{i\sigma V(0)}{k_1^2-\sigma^2}-\frac{X}{\mu_1\left(k_1^2-\sigma^2\right)}-\frac{\overline{q}_1^-(\sigma)}{h\mu_1\left(k_1^2-\sigma^2\right)}, \quad -\infty<\sigma<\infty, \tag{8}$$

$$V_2^+(\sigma)=-\frac{i\sigma V(0)}{k_2^2-\sigma^2}+\frac{X}{\mu_2\left(k_2^2-\sigma^2\right)}-\frac{\overline{q}_2^+(\sigma)}{h\mu_2\left(k_1^2-\sigma^2\right)}, \quad -\infty<\sigma<\infty, \tag{9}$$

$$\bar f(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\sigma x}dx,\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar f(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma.$$

Выше имелось в виду, что действительная ось обходит точки $-k_1,\ -k_2$ сверху, а точки k_1, k_2 – снизу.

Введем функцию

$$W'(x,y)=W(x,y)-u(x,y). \tag{10}$$

После преобразования Фурье для (10) будем иметь

$$\bar W(\sigma,y)=\bar W'(\sigma,y)+2\pi e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k^2}|y|}\cdot\delta(\sigma+\sigma_1). \tag{11}$$

Очевидно, что $\bar W'(x,y)$ удовлетворяет уравнению (7). Выберем то решение уравнения (7), которое представляет уходящую волну. Имеем

$$\bar W'(\sigma,y)=Ae^{-\gamma|y|}. \tag{12}$$

Предполагается, что $\gamma(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$, т.е. решение уравнения в виде формулы (12) и представляет уходящую волну. Для выбора такой ветви двузначной функции $\sqrt{\alpha^2-k^2}$ следует провести в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ разрезы до бесконечности от точек $\sigma=k$ в верхней полуплоскости и $\sigma=-k$ в нижней полуплоскости, т.е. действительная ось обходит точку ветвления $-k$ сверху, а k – снизу [7].

Применив преобразование Фурье к (5), с помощью (12) получим

$$A=-\frac{\bar q_1^-(\sigma)+\bar q_2^+(\sigma)}{\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}}e^{\gamma h}-2\pi\delta(\sigma+\sigma_1), \tag{13}$$

а из (4), (8), (9) – следующее функциональное уравнение Винера–Хопфа относительно $\bar q_1^-(\sigma)$ и $\bar q_2^+(\sigma)$:

$$\bar q_1^-(\sigma)+\bar K(\sigma)\cdot\bar q_2^+(\sigma)=\bar E(\sigma)-2\pi\mu\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k^2}h}\delta(\sigma+\sigma_1), \tag{14}$$

где

$$\bar K(\sigma)=\frac{k_1^2-\sigma^2}{k_2^2-\sigma^2}\bar K_1(\sigma),\quad \bar K_1(\sigma)=\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{L_2(\sigma)}{L_1(\sigma)},\quad L_2(\sigma)=\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}-h\mu_2\left(k_2^2-\sigma^2\right),$$

$$\begin{aligned}\bar E(\sigma)=\frac{h\mu\mu_1\left(k_1^2-\sigma^2\right)\sqrt{\sigma^2-k^2}}{L_1(\sigma)}&\left[i\sigma\left(\frac{1}{k_1^2-\sigma^2}-\frac{1}{k_2^2-\sigma^2}\right)V(0)+\right.\\ &\left.+\left(\frac{1}{\mu_2\left(k_2^2-\sigma^2\right)}-\frac{1}{\mu_1\left(k_1^2-\sigma^2\right)}\right)X\right].\end{aligned} \tag{15}$$

Отметим, что выше имелось ввиду, что действительная ось обходит точки $-\sigma_1,-\sigma_2$ сверху, а точки σ_1,σ_2 – снизу. Для определенности допустим, что $k<k_2<k_1$. В этом случае легко видеть, что $\sigma_1>\sigma_2$.

Для решения функционального уравнения (11) факторизируем $\bar K_1(\sigma)$, представив ее в виде

$$\overline{K}_1(\sigma)=\overline{K}_1^+(\sigma)\cdot\overline{K}_1^-(\sigma), \tag{16}$$

причем $\overline{K}_1^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}(\alpha)>0$, а $\overline{K}_1^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}(\alpha)<0$, $\alpha=\sigma+i\tau$ [7]. Как показано в [1]

$$\overline{K}_1^+(\sigma)=e^{\overline{R}^+(\sigma)},\quad \overline{K}_1^-(\sigma)=e^{\overline{R}^-(\sigma)},$$

$$\overline{R}^-(\sigma)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\varphi(\tau)}{\tau+i(\sigma-i0)}d\tau+\frac{1}{\pi}\int_0^k\frac{\psi(S)}{S-(\sigma-i0)}dS-\ln\frac{\sigma-i0-\sigma_1}{\sigma-i0-\sigma_2}, \tag{17}$$

$$\overline{R}^+(\sigma)=\overline{R}^-(-\sigma),$$

$$\varphi(\tau)=\operatorname{arctg}\frac{h\mu\sqrt{k^2+\tau^2}\left(\mu_2\left(k_2^2+\tau^2\right)-\mu\left(k_1^2+\tau^2\right)\right)}{\mu^2\left(k^2+\tau^2\right)+h^2\mu_1\mu_2\left(k_1^2+\tau^2\right)\left(k_2^2+\tau^2\right)},$$

$$\psi(S)=\operatorname{arctg}\frac{h\mu\sqrt{k^2-S^2}\left(\mu_2\left(k_2^2-S^2\right)-\mu_1\left(k_1^2-S^2\right)\right)}{\mu^2\left(k^2-S^2\right)+h^2\mu_1\mu_2\left(k_1^2-S^2\right)\left(k_2^2-S^2\right)}.$$

Легко видеть, что $\overline{K}^{\pm}(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$. Обозначим

$$\frac{\overline{E}(\sigma)}{\overline{K}^-(\sigma)}=\overline{F}(\sigma)=\overline{F}^+(\sigma)+\overline{F}^-(\sigma), \tag{18}$$

где
$$\overline{F}(\sigma)=\overline{F}_1(\sigma)\left(i\sigma v(0)-\frac{X}{\mu_1}\right)+\overline{F}_2(\sigma)\left(i\sigma v(0)-\frac{X}{\mu_2}\right),$$

$$\overline{F}_1(\sigma)=\frac{h\mu\mu_1\sqrt{\sigma^2-k^2}}{L_1(\sigma)}\cdot\frac{1}{\overline{K}^-(\sigma)},\quad \overline{F}_2(\sigma)=-\frac{h\mu\mu_1\sqrt{\sigma^2-k^2}}{L_1(\sigma)}\cdot\frac{k_1^2-\sigma^2}{k_2^2-\sigma^2}\cdot\frac{1}{\overline{K}^-(\sigma)},$$

$$\overline{F}^-(\sigma)=\overline{F}_1^-(\sigma)\left(i\sigma V(0)-\frac{X}{\mu_1}\right)+\overline{F}_2^-(\sigma)\left(i\sigma V(0)-\frac{X}{\mu_2}\right), \tag{19}$$

$$\overline{F}^+(\sigma)=\overline{F}_1^+(\sigma)\left(i\sigma V(0)-\frac{X}{\mu_1}\right)+\overline{F}_2^+(\sigma)\left(i\sigma V(0)-\frac{X}{\mu_2}\right).$$

Очевидно, что

$$F_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h\mu\mu_1\sqrt{\sigma^2-k^2}}{\mu\sqrt{\sigma^2-k^2}-h\mu_1\left(k_1^2-\sigma^2\right)}\cdot\frac{1}{\overline{K}^-(\sigma)}e^{-i\sigma x}d\sigma,$$
$$\overline{F}_1^-(\sigma)=\int_{-\infty}^{0}F_1(x)e^{i(\sigma-i0)x}d\sigma,\qquad \overline{F}_1^+(\sigma)=\int_0^{\infty}F_1(x)e^{i(\sigma+i0)x}d\sigma. \tag{20}$$

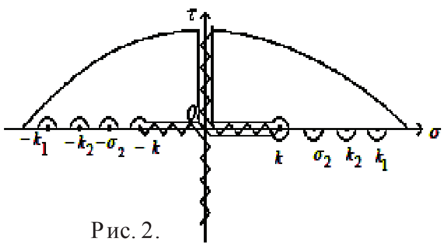

Рис. 2.

$F_1(x)$ определяется с помощью метода контурного интегрирования. Замкнутый контур интегрирования показан на рис. 2.

Из $F_1(x)$ с помощью (19) и (20) получим $\overline{F}_1^{\pm}(\sigma)$:

$$\bar{F}_1^-(\sigma)=\frac{h^2\mu_2^2\mu}{\pi}\left(\int_0^\infty\frac{\bar{K}^+(i\tau)\sqrt{k^2+\tau^2}\left(k_2^2+\tau^2\right)^2}{\left(k_1^2+\tau^2\right)\left(\mu^2(k^2+\tau^2)+h^2\mu_2^2(k_2^2+\tau^2)^2\right)}\cdot\frac{d\tau}{\tau+i(\sigma-i0)}-\right.$$

$$\left.-\int_0^k\frac{\sqrt{k^2-S^2}\,\bar{K}^+\left(k_2^2-S^2\right)^2}{\left(k_1^2-S^2\right)\left(\mu^2(k^2-S^2)+h^2\mu_2^2(k_2^2-S^2)^2\right)}\cdot\frac{dS}{S-i\left(\sigma-i0\right)}\right)+$$

$$+\frac{A_{-1}}{\sigma-(k_1+i0)}+\frac{B_{-1}}{\sigma-(\sigma_2+i0)},$$

$$\bar{F}_1^+(\sigma)=\bar{F}_1(\sigma)-\bar{F}_1^-(\sigma),$$

где $A_{-1}=-\dfrac{h\mu\mu_2\sqrt{k_1^2-k^2}\,\bar{K}^+(k_1)}{L_2(k_1)}\cdot\dfrac{k_2^2-k_1^2}{2k_1}$, $B_{-1}=-\dfrac{h\mu\mu_2(\sigma_2^2-k^2)}{\sigma_2\left(\mu+2h\mu_2\sqrt{\sigma_2^2-k^2}\right)}\cdot\dfrac{k_2^2-\sigma_2^2}{k_1^2-\sigma_2^2}$.

Аналогично определяются $F_2^{\pm}(\sigma)$:

$$\bar{F}_2^-(\sigma)=-\frac{h^2\mu_2^2\mu}{\pi}\left(\int_0^\infty\frac{\sqrt{k^2+\tau^2}\,(k_2^2+\tau^2)\bar{K}^+(i\tau)}{\mu^2(k^2+\tau^2)+h^2\mu_2^2(k_2^2+\tau^2)}\cdot\frac{d\tau}{\tau+i(\sigma-i0)}-\right.$$

$$\left.-\int_0^k\frac{\sqrt{k^2-S^2}\,(k_2^2-S^2)\bar{K}^+(S)}{\mu^2(k^2-S^2)+h^2\mu_2^2(k_2^2-S^2)}\cdot\frac{dS}{S-(\sigma-i0)}\right)-\frac{D_{-1}}{\sigma-(\sigma_2+i0)},$$

$$\bar{F}_2^+(\sigma)=\bar{F}_2(\sigma)-\bar{F}_2^-(\sigma),$$

где $D_{-1}=\dfrac{h\mu\mu_2(\sigma_2^2-k^2)\bar{K}^+(\sigma_2)}{\sigma_2\left(\mu+2h\mu_2\sqrt{\sigma_2^2-k^2}\right)}$.

После полной факторизации уравнения (14) определяются $\bar{q}_1^-(\sigma)$ и $\bar{q}_2^+(\sigma)$ [1]:

$$\bar{q}_1^-(\sigma)=\bar{K}^-(\sigma)\bar{F}^-(\sigma)+\frac{i\mu\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,h}}{\bar{K}^-(-\sigma_1)}\cdot\frac{\bar{K}^-(\sigma)}{\sigma+\sigma_1-i0}, \tag{21}$$

$$\bar{q}_2^+(\sigma)=\frac{\bar{F}^+(\sigma)}{\bar{K}^+(\sigma)}-\frac{i\mu\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,h}}{\bar{K}^-(-\sigma_1)}\cdot\frac{1}{\bar{K}(\sigma)}\cdot\frac{1}{\sigma+\sigma_1+i0}. \tag{22}$$

С помощью обратного преобразования Фурье и метода контурного интегрирования определяются $q_1^-(x)$ и $q_2^+(x)$:

$$q_1^-(x)=-\frac{h\mu\mu_1}{\pi\mu_2}\left(\int_0^\infty\left(\frac{h\bar{K}^+(i\tau)(\mu_1\mu_2(k_2^2-k_1^2)V(0)\tau-X(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2-(\mu_1-\mu_2)\tau^2))}{\bar{K}^+(i\tau)(\mu^2(k^2+\tau^2)+h^2\mu_1^2(k_1^2+\tau^2)^2)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\bar{F}^+(i\tau)(\mu_1k_1^2-\mu_2k_2^2+(\mu_1-\mu_2)\tau^2)}{\bar{K}^+(i\tau)(\mu^2(k^2+\tau^2)+h^2\mu_1^2(k_1^2+\tau^2)^2)}\cdot\frac{k_1^2+\tau^2}{k_2^2+\tau^2}\cdot\sqrt{k^2+\tau^2}\,e^{\tau x}d\tau\right)+\right.$$

$$
+i\int_{0}^{k}\frac{h\bar{K}^{+}(\sigma)(\mu_1\mu_2(k_2^2-k_1^2)v(0)i\tau)-X\left(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2+(\mu_1-\mu_2)\sigma^2\right)}{\bar{K}^{+}(\sigma)\left(\mu^2(k^2-\sigma^2)+h^2\mu_1^2(k_1^2-\sigma^2)^2\right)}+
$$

$$
\left.+\frac{\bar{F}^{+}(\sigma)\left(\mu_1k_1^2-\mu_2k_2^2-(\mu_1-\mu_2)\sigma^2\right)}{\bar{K}_1(\sigma)\left(\sigma^2(k^2-\sigma^2)+h^2\mu_1^2(k_1^2-\sigma^2)\right)}\right)\times
$$

$$
\times\frac{k_1^2-\sigma^2}{k_2^2-\sigma^2}\cdot\sqrt{k^2-\sigma^2}\,e^{-i\sigma x}d\sigma-\frac{hA_0\mu}{\pi}\frac{\mu_1}{\mu_2}\left(\int_{0}^{\infty}\frac{\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2-(\mu_1-\mu_2)\tau^2}{\mu^2(k^2+\tau^2)+h^2\mu_1^2(k_1^2+\tau^2)^2}\times\right. \tag{23}
$$

$$
\times\frac{1}{\bar{K}^{+}(i\tau)}\cdot\frac{k_1^2+\tau^2}{k_2^2+\tau^2}\sqrt{k^2+\tau^2}\,e^{\tau x}\,\frac{d\tau}{i\tau+\sigma_1+i0}+i\int_{0}^{k}\frac{\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2+(\mu_1-\mu_2)\sigma^2}{\mu^2(k^2-\sigma^2)+h^2\mu_1^2(k_1^2-\sigma^2)^2}\times
$$

$$
\left.\times\frac{1}{\bar{K}^{+}(\sigma)}\cdot\frac{k_1^2-\sigma^2}{k_2^2-\sigma^2}\sqrt{k^2-\sigma^2}\,e^{-i\sigma x}d\sigma\right)-\frac{h\mu\mu_1(k_1^2-\sigma_1^2)}{\mu+2h\mu\sqrt{\sigma_1^2-k^2}}e^{i\sigma_1x}+i(B''_{-1}+D''_{-1})e^{-i\sigma_1x},
$$

где

$$
B''_{-1}=\left(\frac{\bar{K}^{+}(\sigma_1)h\mu\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,(i\sigma_1\mu_1\mu_2(k_2^2-k_1^2)V(0)-X(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2+(\mu_1-\mu_2)\sigma_1^2)}{\mu_2\cdot\sigma_1(k_2^2-\sigma_1^2)\bar{K}^{+}(\sigma_1)\left(\mu+2h\mu_1\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\right)}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{\mu_1\bar{F}^{+}(\sigma_1)(k_1^2-\sigma_1^2)L_2(\sigma_1))}{\mu_2\cdot\sigma_1(k_2^2-\sigma_1^2)\bar{K}^{+}(\sigma_1)\left(\mu+2h\mu_1\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\right)}\right)\sqrt{\sigma_1^2-k^2},
$$

$$
D''_{-1}=\frac{\mu_1A_0\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,L_1(\sigma_1)}{\mu_2\bar{K}^{+}(\sigma_1)\sigma_1\left(\mu+2h\mu_1\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\right)}\cdot\frac{k_1^2-\sigma_1^2}{k_2^2-\sigma_1^2};
$$

$$
q_2^{+}(x)=\frac{h\mu\,\mu_2}{\pi\,\mu_1}\left(\int_{0}^{\infty}\left(\frac{h\left(\mu_1\mu_2(k_2^2-k_1^2)V(0)\tau-X(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2-(\mu_1-\mu_2)\tau^2)\right)}{\mu^2(k^2+\tau^2)+h^2\mu_2^2(k_2^2+\tau^2)^2}-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{\bar{F}^{-}(i\tau)\bar{K}^{-}(-i\tau)(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2-(\mu_1-\mu_2)\tau^2)}{\mu^2(k^2+\tau^2)+h^2\mu_2^2(k_2^2+\tau^2)^2}\right)\cdot\frac{k_2^2+\tau^2}{k_1^2+\tau^2}\sqrt{k^2+\tau^2}\,e^{-\tau x}d\tau\right)+
$$

$$
+i\int_{0}^{k}\left(\frac{h\left(\mu_1\mu_2(k_2^2-k_1^2)V(0)\sigma-X(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2+(\mu_1-\mu_2)\sigma^2)\right)}{\mu^2(k^2-\sigma^2)+h^2\mu_2^2(k_2^2-\sigma^2)^2}-\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{\bar{F}^{-}(-\sigma)\bar{K}^{-}(-\sigma)(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2+(\mu_1-\mu_2)\sigma^2)}{\mu^2(k^2-\sigma^2)+h^2\mu_2^2(k_2^2-\sigma^2)^2}\right)\cdot\frac{k_2^2-\sigma^2}{k_1^2-\sigma^2}\sqrt{k^2-\sigma^2}\,e^{i\sigma x}d\sigma\right)+
$$

$$
+\frac{A_0h\mu\,\mu_2}{\mu_1}\left(\int_{0}^{\infty}\frac{\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2-(\mu_1-\mu_2)\tau^2}{\mu^2(k^2+\tau^2)+h^2\mu_2^2(k_2^2+\tau^2)^2}\frac{k_1^2+\tau^2}{k_1^2+\tau^2}\cdot\frac{\bar{K}^{-}(-i\tau)\sqrt{k^2+\tau^2}}{-i\tau+(\sigma_1-i0)}e^{-\tau x}d\tau+\right.
$$

$$+i\int_0^k \frac{\mu_2 k_2^2-\mu_1 k_1^2+(\mu_1-\mu_2)\sigma^2}{\mu^2(k^2-\sigma^2)+h^2\mu_2^2(k_2^2-\sigma^2)^2}\cdot\frac{k_2^2-\sigma^2}{k_1^2-\sigma^2}\cdot\frac{\bar{K}^-(-\sigma)}{-\sigma-\sigma_1-i0}e^{i\sigma x}d\sigma\Bigg)+$$

$$+\frac{i\mu_2 A_0}{\mu_1}\cdot\frac{\bar{K}^-(-\sigma_1)}{\bar{K}(-\sigma_1)}e^{i\sigma_1 x}+i(\alpha_{-1}+\beta_{-1})e^{i\sigma_2 x},$$

где $\alpha_{-1}=-\dfrac{\mu_2 L_1(-\sigma_2)\sqrt{\sigma_2^2-k^2}}{\mu_1\left(\sigma_2\mu+2h\mu_2\sqrt{\sigma_2^2-k^2}\right)}\cdot\dfrac{\bar{K}^-(-\sigma_2)}{-\sigma_2+\sigma_1-i0}\cdot\dfrac{k_2^2-\sigma_2^2}{k_1^2-\sigma_1^2}$,

$$\beta_{-1}=-\frac{h\mu\sqrt{\sigma_2^2-k^2}\,(-i\sigma_2\mu_1\mu_2(k_2^2-k_1^2)V(0)-X(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2+(\mu_1-\mu_2)\sigma_2^2))}{\mu_1\sigma_2(k_1^2-k_2^2)\left(\mu+2h\mu_2\sqrt{\sigma_2^2-k^2}\right)}-$$

$$-\frac{\mu_2\bar{F}(-\sigma_2)\bar{K}^-(-\sigma_2)(k_2^2-\sigma_2^2)L_1(-\sigma_2)}{\mu_1\sigma_2(k_1^2-k_2^2)\left(\mu+2h\mu_2\sqrt{\sigma_2^2-k^2}\right)}.$$

Асимптотические формулы для функций $q_1^-(x)$ и $q_2^+(x)$ в дальней зоне $(|x|\to\infty)$ имеют вид:

$q_1^-(x)=i(B''_{-1}+D''_{-1})e^{-i\sigma_1 x}+A_3e^{i\sigma_1 x}+i(A_1+A_2)|kx|^{-3/2}e^{i(-kx+\pi/4)}+0\left(|kx|^{-5/2}\right)$ при $x\to-\infty$, где

$$A_1=-\frac{\mu k^2}{h\mu_1\mu_2\sqrt{2\pi}}\frac{h\bar{K}^+(k)\left(i\mu_1\mu_2kV(0)(k_2^2-k_1^2)-X\left(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2+(\mu_1-\mu_2)k\right)\right)}{(k_1^2-k^2)(k_2^2-k^2)\bar{K}^+(k)}+$$

$$+\frac{\bar{F}^+(k)(\mu_1k_1-\mu_2k_2-(\mu_1-\mu_2)k^2)}{(k_1^2-k^2)(k_2^2-k^2)\bar{K}^+(k)},$$

$$A_2=\frac{A_0\mu}{h\mu_1\mu_2}\frac{k^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2-(\mu_1-\mu_2)k^2}{(k_1^2-k^2)(k_2^2-k^2)\bar{K}^+(k)}\cdot\frac{1}{k+\sigma_1+i0},$$

$$A_3=-\frac{h\mu\mu_1(k_1^2-\sigma_1^2)e^{-h\sqrt{\sigma_1^2-k^2}}}{\mu+2h\mu_1\sqrt{\sigma_1^2-k^2}};$$

$q_2^+(x)=i(\alpha_{-1}+\beta_{-1})e^{i\sigma_2 x}+i(B_1+B_2)|kx|^{-3/2}e^{i(kx+\pi/4)}+0\left((kx)^{-5/2}\right)$ при $x\to+\infty$,

ãäå $B_1=\dfrac{\mu}{h\mu_1\mu_2}\cdot\dfrac{k^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{h(i\mu_1\mu_2kV(0)(k_2^2-k_1^2)-X(\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2-(\mu_1-\mu_2)k^2))}{(k_1^2-k^2)(k_2^2-k^2)}-$

$$-\frac{\bar{F}^-(-k)\bar{K}(-k)(\mu_1k_2^2-\mu_1k_1^2-(\mu_1-\mu_2)k^2)}{(k_1^2-k^2)(k_2^2-k^2)},$$

$$B_2=-\frac{A_0\mu}{h\mu_1\mu_2}\frac{\mu_2k_2^2-\mu_1k_1^2-(\mu_1-\mu_2)}{(k_1^2-k^2)(k_2^2-k^2)}\cdot\frac{\bar{K}^-(-k)}{-k-\sigma_1-i0}.$$

При $|x|\to 0$, т.е. в окружности линии раздела тонких слоев,

$$q_1^-(x) + q_2^+(x) = \frac{\mu(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 \mu_{,2}} \cdot \frac{X}{\pi} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) + 0(1).$$

Выражаю глубокую благодарность профессору Э.Х. Григоряну за постановку задачи и полезные советы.

Кафедра механики сплошной среды *Поступила 26.02.2007*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Восканян А.Р., Григорян Э.Х.** – Изв. НАН РА. Механика. 2007, № 2.
2. **Новацкий В.К.** Теория упругости. М.: Мир, 1975, 872 с.
3. **Лейбензон Л.С.** Курс теории упругости. М.: Гостехиздат, 1947, 464 с.
4. **Геворкян А.В.** Об одной задаче дифракции волн Лява. – В кн.: Материалы Второй всесоюзной технической конференции «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов». Ер., 1984, т. 1, с. 162–167.
5. **Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А.** – Изв. НАН РА. Механика. 2003, т. 56, № 4, с. 3–17.
6. **Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А.** Дифракция локализованной сдвиговой волны в упругом пространстве с полубесконечным включением: Материалы Рос. межд. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела». Саратов, 2005, с. 105–107.
7. **Нобл Б.** Метод Винера–Хопфа. М.: Мир, 1962, 279 с.

Ա. Ռ. ՈՍԿԱՆՅԱՆ

ԼՅԱՎԻ ԱԼԻՔԻ ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՆ ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՆԵՐԴԻՐՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է առաձգական տարածությունում գտնվող երկու կիսաանվերջ շերտերի բաժանման մակերևույթից Լյավի ալիքի դիֆրակցիան: Խնդիրը բերվում է կոնտակտային լարումների ամպլիտուդի Ֆուրյեի տրանսֆորմանտի նկատմամբ Վիների Հոպֆի ֆունկցիոնալ հավասարման լուծմանը: Ստացված են կոնտակտային լարումների ամպլիտուդների ասիմպտոտական բանաձևեր անվերջ հեռու կետերում և բարակ շերտերի բաժանման գծի մոտակայքում:

A. R. VOSKANYAN

DIFFRACTION OF LOVE WAVE IN THE MEDIUM WITH PIECEWISE HOMOGENEOUS ELASTIC INFINITE INCLUSION

Summary

Diffraction of Love Wave in elastic medium is considered from the boundary where two semi-infinite elastic layers are departed. The problem is brought to the solution of Viener–Hopf functional equation due to Furie transformators of contact stress amplitudes Asymptotic formulas are obtained for contact stress amplitudes in the farther zone and in the departing of thin layers.