ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2007 Естественные науки

Ինֆորմատիկա

УДК 517.19

Ռ. Օ. ԱԴԱՄՅԱՆ

ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ԱԳԱՀ ԱԼԳՈՐԻԹՄԻ ՇԵՂՈՒՄԸ q-ՆԵՐԿՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ներածություն: Դիցուք $G=(V,E)$-ն սովորական գրաֆ է և $1\le q\le \chi(G)$, որտեղ $\chi(G)$-ն G գրաֆի գագաթային ներկման թիվն է:G գրաֆում գտնել մաքսիմալ q-ներկելի ենթագրաֆ նշանակում է գտնել հնարավորինս շատ գագաթներ պարունակող $V'\subseteq V$ ենթաբազմություն, որ $G[V']$ գրաֆը լինի q-ներկելի, որտեղ $G[V']$-ը G գրաֆի V' գագաթներով ծնված ենթագրաֆն է:

Գտնել մաքսիմալ q-ներկելի ենթագրաֆ նշանակում է գտնել q հատ զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող գագաթների անկախ բազմություններ, որոնք պարունակում են հնարավորինս շատ գագաթներ: $q=1$ դեպքում այս խնդիրը վերածվում է գագաթների ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդրին, իսկ $q=\chi(G)$ դեպքում` սովորական ներկման խնդրին: Հետևաբար, մաքսիմալ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը հանդիսանում է այս երկու խնդիրների ընդհանրացումը:

Բազմանդամային ալգորիթմի միջոցով մաքսիմալ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը կարելի է հանգեցնել գագաթների ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդրին և հակառակը [1]: Հետևաբար, մաքսիմալ q-ներկելի ենթագրաֆ և գագաթների ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդիրներն իրար համարժեք են: Ուստի ընդհանուր դեպքում մաքսիմալ q-ներկելի ենթագրաֆ գտնելու խնդիրը NP-լրիվ խնդիր է [2]: Այն մնում է NP-դժվար խնդիր նաև կատարյալ գրաֆների համար [3], սակայն գոյություն ունեն այն լուծող էֆեկտիվ ալգորիթմներ համեմատությունների և կոհամեմատությունների գրաֆների դասերի համար [4, 5]:

Ստորև բերված է q-ներկելի ենթագրաֆ գտնող ընդհանրացված ագահ ալգորիթմ և ապացուցված է, որ նրա շեղումն օպտիմալ ալգորիթմից չի գերազանցում $e/(e-1)$-ը կամայական q-ի դեպքում: Սովորական ագահ ալգորիթմն իր յուրաքանչյուր քայլում գտնում է ընթացիկ գրաֆի գագաթների որևէ ամենամեծ անկախ բազմություն, իսկ ընդհանրացված ագահ ալգորիթմն իր յուրաքանչյուր քայլում գտնում է ընթացիկ գրաֆի գագաթների առավելագույն թվով ամենամեծ անկախ բազմություններ: Ուստի սովորական ագահ ալգորիթմը կարելի է կիրառել այնպիսի գրաֆների դասի նկատմամբ, որոնց համար գագաթների ամենամեծ անկախ բազմություն գտնելու խնդիրն ունի էֆեկտիվ լուծում: Այդպիսին են, օրինակ, կատարյալ գրաֆների և շրջանագծի լարերի հատման գրաֆների դասերը [6, 7]: Իսկ ընդհանրացված ագահ ալգորիթմի համար անհրաժեշտ է, որ առավելագույն թվով ամենամեծ անկախ բազմություններ գտնելու խնդիրն ունենա էֆեկտիվ լուծում: Օրինակ, համեմատությունների և կոհամեմատությունների գրաֆների դասերի համար գտնված են առավելագույն թվով ամենամեծ անկախ բազմություններ գտնող ալգորիթմներ [4]:

Ալգորիթմի նկարագրությունը և շեղման գնահատումը: Ալգորիթմի նկարագրության մեջ և շեղման գնահատականի դուրս բերման ընթացքում օգտագործված $\bigcup\limits_{i=r}^{t}$ միավորում և $\sum\limits_{i=r}^{t}$ գումար գործողությունների համար կընդունենք, որ եթե $t<r$, ապա $\bigcup\limits_{i=r}^{t} A_i=\varnothing$ և $\sum\limits_{i=r}^{t} a_i=0$:

Ընդհանրացված ագահ ալգորիթմ:

1. Վերցնենք $G_1=G, p=1$:

2. G_p գրաֆում գտնենք մաքսիմալ քանակով զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող ամենամեծ անկախ բազմություններ՝ $I_{p1}, I_{p2}, \dots, I_{pk_p}$:

3. Եթե $\sum\limits_{i=1}^{p} k_i \ge q$, ապա որպես q-ներկելի ենթագրաֆ վերցնենք $G'=G\left[\bigcup\limits_{i=1}^{p-1}\bigcup\limits_{j=1}^{k_i} I_{ij}+\bigcup\limits_{j=1}^{m} I_{pj}\right]$ գրաֆը, որտեղ $\sum\limits_{i=1}^{p-1} k_i+m=q$, և ավարտենք ալգորիթմի աշխատանքը: Հակառակ դեպքում կառուցենք $G_{p+1}=G_p-\bigcup\limits_{j=1}^{k_p} I_{pj}$ գրաֆը, վերցնելով $p=p+1$, և անցնենք 2-րդ քայլին:

Թեորեմ: Ընդհանրացված ագահ ալգորիթմով ստացված ենթագրաֆի գագաթների քանակի շեղումը մաքսիմալ ենթագրաֆի գագաթների քանակից չի գերազանցում $1+1/(e-1)$ -ը:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք, որ $q=\sum\limits_{i=1}^{p} k_i$:

Դիցուք $|I_{i1}|=|I_{i2}|=\dots=|I_{ik_i}|=\alpha_i, i=1,2,\dots,p; \quad \alpha_i>\alpha_j, i<j$: Այդ դեպքում այս ալգորիթմով ստացված ենթագրաֆը կպարունակի $\sum\limits_{i=1}^{p} k_i\alpha_i$ գագաթ: Այժմ վերևից գնահատենք օպտիմալ ենթագրաֆի գագաթների քանակը:

Ենթադրենք օպտիմալ ենթագրաֆը պարունակում է V_q գագաթ:

Ակնհայտ է, որ ցանկացած $A \subseteq V$ գագաթների ենթաբազմության համար $|A|+q\alpha(G-A) \ge V_q$, որտեղ $\alpha(G)$-ն G գրաֆի գագաթների ամենամեծ անկախ բազմության չափն է: Որպես A բազմություն վերցնելով $\bigcup_{i=1}^{j-1}\bigcup_{t=1}^{k_i} I_{it}$, $j=1,2,\dots,p$, բազմությունը՝ կստանանք, որ

$$V_q \le \sum_{i=1}^{j-1} k_i\alpha_i + q\alpha_j, \quad j=1,2,\dots,p: \;.... \tag{1}$$

Այսպիսով, ագահ ալգորիթմով ստացված արդյունքի շեղումն օպտիմալից գնահատելու համար պետք է գտնել $\min\limits_{1\le j\le p}\left(\sum_{i=1}^{j-1} k_i\alpha_i + q\alpha_j\right)\Big/\sum_{i=1}^{p} k_i\alpha_i$ արտահայտության մեծագույն արժեքը:

Ենթադրենք

$$\min_{1\le j\le p}\left(\sum_{i=1}^{j-1} k_i\alpha_i + q\alpha_j\right) = \sum_{i=1}^{j_0-1} k_i\alpha_i + q\alpha_{j_0}: \tag{2}$$

Ուրեմն,

$$\frac{\min\limits_{1\le j\le p}\left(\sum_{i=1}^{j-1} k_i\alpha_i + q\alpha_j\right)}{\sum_{i=1}^{p} k_i\alpha_i} = \frac{\sum_{i=1}^{j_0-1} k_i\alpha_i + q\alpha_{j_0}}{\sum_{i=1}^{p} k_i\alpha_i} = 1 + \frac{q\alpha_{j_0} - \sum_{i=j_0}^{p} k_i\alpha_i}{\sum_{i=1}^{p} k_i\alpha_i} = 1 + \frac{1 - \sum_{i=j_0}^{p}\frac{k_i}{q}\cdot\frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}}}{\sum_{i=1}^{j_0-1}\frac{k_i}{q}\cdot\frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}} + \sum_{i=j_0}^{p}\frac{k_i}{q}\cdot\frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}}} :(3)$$

(3)-ում մաքսիմալ արժեք ստանալու համար պետք է $\sum_{i=1}^{j_0-1}\frac{k_i}{q}\cdot\frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}}$ և $\sum_{i=j_0}^{p}\frac{k_i}{q}\cdot\frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}}$ գումարներն ընդունեն մինիմալ արժեքներ:

(2)-ից ունենք, որ

$$\sum_{i=1}^{j-1} k_i\alpha_i + q\alpha_j \ge \sum_{i=1}^{j_0-1} k_i\alpha_i + q\alpha_{j_0}, \quad j \le j_0-1, \dots\dots\dots \tag{4}$$

որտեղից $q\alpha_j \ge \sum_{i=j}^{j_0-1} k_i\alpha_i + q\alpha_{j_0}$ և $\frac{\alpha_j}{\alpha_{j_0}} \ge \sum_{i=j}^{j_0-1}\frac{k_i}{q}\cdot\frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}} + 1$:

Նշանակենք $H(j) = \sum_{i=j}^{j_0-1}\frac{k_i}{q}\cdot\frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}} + 1$, $j=1,\dots,j_0$, կունենանք $\frac{\alpha_j}{\alpha_{j_0}} \ge H(j)$:

Այստեղից՝ $H(j_0)=1$: $H(j) = H(j+1) + \frac{k_j}{q}\cdot\frac{\alpha_j}{\alpha_{j_0}} \ge H(j+1) + \frac{k_j}{q}H(j)$,

$$H(j) \ge \frac{1}{1-k_j/q}H(j+1):$$

Հետևաբար, որպեսզի $\sum_{i=1}^{j_0-1}\frac{k_i}{q}\cdot\frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}}=H(1)-1$ արտահայտությունը ընդունի մինիմալ արժեք, անհրաժեշտ է, որ (4)-ում տեղի ունենա հավասարություն:

Մյուս կողմից, (2)-ից ունենք, որ

$$\sum_{i=1}^{j-1}k_i\alpha_i+q\alpha_j\ge\sum_{i=1}^{j_0-1}k_i\alpha_i+q\alpha_{j_0},\quad j\ge j_0+1,........\qquad(5)$$

որտեղից $\sum_{i=j_0}^{j-1}k_i\alpha_i+q\alpha_j\ge q\alpha_{j_0}$ և $\frac{\alpha_j}{\alpha_{j_0}}\ge1-\sum_{i=j_0}^{j-1}\frac{k_i}{q}\cdot\frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}}$:

Նշանակենք $F(j)=-1+\sum_{i=j_0}^{j}\frac{k_i}{q}\cdot\frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}}$, կունենանք $\frac{\alpha_j}{\alpha_{j_0}}\ge-F(j-1)$:

Այստեղից $F(j_0)=-1+k_{j_0}/q=-\left(1-k_{j_0}/q\right)$:

$$F(j)=F(j-1)+\frac{k_j}{q}\cdot\frac{\alpha_j}{\alpha_{j_0}}\ge F(j-1)-\frac{k_j}{q}F(j-1)=F(j-1)\left(1-\frac{k_j}{q}\right),$$

որտեղից հետևում է, որ $F(j)$-ն ($j=j_0+1,\dots,p$) կընդունի իր ամենափոքր $F(j)=-\prod_{i=j_0}^{j}\left(1-k_i/q\right)$ արժեքը, եթե (5)-ում տեղի ունենա հավասարություն:

Այսպիսով, ցույց տվեցինք, որ (3)-ում մաքսիմալ արժեք ստանալու համար անհրաժեշտ է, որ $\sum_{i=1}^{j-1}k_i\alpha_i+q\alpha_j=\sum_{i=1}^{j_0-1}k_i\alpha_i+q\alpha_{j_0}$, $j=1,2,\dots,p$:

Հետագա հաշվարկները հեշտացնելու համար ենթադրենք, որ $j_0=1$, այդ դեպքում (3)-ի համար կունենանք $\frac{q\alpha_1}{\sum_{i=1}^{p}k_i\alpha_i}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{p}\frac{k_i}{q}\cdot\frac{\alpha_i}{\alpha_1}}=\frac{1}{1-\prod_{i=1}^{p}\left(1-k_i/q\right)}$:

Քանի որ $\sum_{i=1}^{p}\left(1-k_i/q\right)=p-1$, ապա $\prod_{i=1}^{p}\left(1-k_i/q\right)$-ն կընդունի իր մեծագույն արժեքը, եթե $k_i=q/p$, $i=1,2,\dots,p$: Ուրեմն՝ $\prod_{i=1}^{p}\left(1-k_i/q\right)\le\left(1-1/p\right)^p$:

Այսպիսով, եթե ալգորիթմն իր աշխատանքն ավարտել է p քայլ հետո, ապա ստացված ենթագրաֆի գագաթների քանակը փոքր է օպտիմալ ենթագրաֆի գագաթների քանակից ոչ ավելի, քան $\frac{1}{1-\left(1-1/p\right)^p}$ անգամ:

Քանի որ $\left(1-1/p\right)^p$-ն աճելով ձգտում է $1/e$-ի, ապա

$$\frac{1}{1-\left(1-1/p\right)^p}\le\frac{1}{1-1/e}=1+\frac{1}{e-1}\left(1-1/p\right)^p:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Ի դեպ, օպտիմալ ենթագրաֆի գագաթների քանակի (1) գնահատականը կլինի ճիշտ նաև այն դեպքում, երբ բերված ալգորիթմի 2-րդ քայլում մաքսիմալ քանակով զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող ամենամեծ անկախ բազմությունների փոխարեն պարզապես պահանջենք գտնել k_p հատ զույգ առ զույգ իրար հետ չհատվող ամենամեծ անկախ բազմություններ: Իսկ եթե վերցնենք $k_p = 1$, ապա նկարագրված ալգորիթմը կվերածվի սովորական ագահ ալգորիթմի, հետևաբար, ստացված շեղման գնահատականը կլինի ճիշտ նաև սովորական ագահ ալգորիթմի համար: Այստեղից հետևում է, որ նախկինում [1] սովորական ագահ ալգորիթմի շեղման համար գտնված 2 գնահատականը հասանելի չէ:

Դիսկրետ մաթեմատիկայի ամբիոն *Ստացվել է 30.10.2006*

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **Narasimhan G.** — Computer Sciences Techninal Report, 1989, № 864, p. 49—57.
2. **Garey M., Johnson D.** Computers and intractability. San Francisco, 1979, p. 194.
3. **Yannakakis M., Gavril F.** — Information processing latters, 1987, v. 24, № 2, p. 133—137.
4. **Маркосян С.Е.** — Изв. НАН Армении, Математика, 2000, т. 35, № 2, с. 67—78.
5. **Schrijver A.** Combinatorial Optimization. Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 2003, p. 224—226.
6. **Grotshcel M., Lovosz L., Schrijver A.** — Combinatorica, 1981, v. 1, № 2, p. 169—197.
7. **Gavril F.** — Networks, 1974, v. 4, p. 357—369.

Р. О. АДАМЯН

ОТКЛОНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ЖАДНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЗАДАЧИ q-РАСКРАСКИ

Резюме

В данной работе описан обобщенный жадный алгоритм для нахождения q-хроматического подграфа, где q натуральное число. Доказано, что отклонение этого алгоритма от оптимального не превосходит $e/(e-1)$ для произвольного q. Показано также, что отклонение обычного жадного алгоритма от оптимального тоже не превосходит $e/(e-1)$. Таким образом, прежде найденная оценка 2 для отклонения обычного жадного алгоритма не достижима.

R. O. ADAMYAN

PERFORMANCE RATIO OF THE GENERALIZED GREEDY ALGORITHM FOR q-COLORING PROBLEM

Summary

In this paper a generalized greedy algorithm finding q-colorable subgraph is described, where q is a natural number, and it is proven that the performance ratio of the described algorithm does not exceed $e/(e-1)$ for arbitrary q. Then it is shown that the performance ratio of the simple greedy algorithm also doesn't exceed $e/(e-1)$. Thus, it follows that the performance ratio 2 previously found for simple greedy algorithm is not attainable.