ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2007 Естественные науки

Математика

УДК 517.948

Г. М. АЙРАПЕТЯН, А. В. ЦУЦУЛЯН

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работе изучается задача Дирихле в полуплоскости в весовых пространствах. Найдены условия, при которых данная задача имеет решение. При выполнении этих условий найден явный вид решения. Получена также одна теорема единственности в классе гармонических функций в полуплоскости.

1. Пусть B – класс функций u, гармонических в верхней полуплоскости $G^+ = \{z; \operatorname{Im} z > 0\}$ и для любого $y_0 > 0$ удовлетворяющих неравенству

$$|u(z)| < C \exp |z|^\gamma, \ \gamma < 1, \ \operatorname{Im} z > y_0,$$

где C – постоянная зависящая от y_0. В данной работе рассматривается задача Дирихле в следующей постановке: определить действительную гармоническую функцию $u \in B$ так, чтобы имело место граничное условие

$$\lim_{y \to 0} \|u(x,y) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{1}$$

где $\rho(x) = (1+|x|)^\alpha$, $\alpha > 0$ – действительное число, $\|.\|_{L^1(\rho)}$ – норма пространства $L^1(\rho)$, $f \in L^1(\rho)$:

$$\|f\|_{L^1(\rho)} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \rho(x) dx < \infty .$$

В работе [1] установлено, что для любой функции $f \in L^1(\rho)$ при $\alpha \le 0$ задача (1) имеет решение, и найден явный вид общего решения. Аналогичная задача в единичном круге при $\alpha \le 0$ исследована в работах [2, 3].

В настоящей работе устанавливается, что условия

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) t^{n_0 - k - 1} dt = 0, \ k = 0,1,\dots,-n_0 - 1, \tag{2}$$

где $n_0 = [\alpha]$, необходимы и достаточны для того, чтобы задача (1) имела решение. Изучается также вопрос единственности гармонических функций в полуплоскости.

2. Следуя терминологии монографии [4], если $\Omega(z)$ аналитическая функция в $G^+ \cup G^-$, $(G^- = \{z; \operatorname{Im} z < 0\})$, то обозначим функцию $\Omega_*(z) = -\overline{\Omega(\bar{z})}$ (также аналитическую в $G^+ \cup G^-$). Далее, гармоническую в G^+ функцию $u(z)$ можно представить в виде $u(z) = \operatorname{Re}\Phi^+(z)$, где $\Phi^+(z)$ аналитическая функция в G^+. Определим аналитическую в G^- функцию $\Phi^-(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})}$. Функцию, определенную в $G^+ \cup G^-$, равную $\Phi^+(z)$ в G^+ и $\Phi^-(z)$ в G^-, обозначим через $\Phi(z)$. Ясно, что для этой функции будем иметь

$$\Phi(z) = \Phi_*(z). \tag{3}$$

Если функция $u(z)$ удовлетворяет условию (2), то соответствующая ей функция $\Phi(z)$ удовлетворяет граничному условию

$$\lim_{y \to 0} \left\| \Phi^+(x+iy) - \Phi^-(x-iy) - 2f(x) \right\|_{L^1(\rho)} = 0. \tag{4}$$

Тем самым, если $u(z)$ решение задачи (1), то соответствующая функция $\Phi(z)$ является решением задачи (4), (3). Заметим также, что не каждое решение граничной задачи (4) удовлетворяет условию (3), однако если $\Psi(z)$ удовлетворяет условию (4), то $\Psi_*(z)$ также удовлетворяет этому условию и имеет место равенство $(\Psi(z) + \Psi_*(z))_* = (\Psi(z) + \Psi_*(z))$. Следовательно, если $\Phi(z)$ – общее решение задачи (4), то общее решение задачи (4), (3) можно представить в виде: $\Omega(z) = \dfrac{1}{2}(\Phi(z) + \Phi_*(z))$.

Соответственно общее решение задачи (1) можно представить в виде:

$$u(z) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\Phi(z) + \Phi_*(z)). \tag{5}$$

3. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Однородная задача (1) имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ некоторое решение однородной задачи (1) ($f \equiv 0$). Тогда из (1) имеем $\lim\limits_{y \to 0} \|u(x,y)\|_{L^1} = 0$. Из результатов работы [5] следует, что если $u(x,y) \in B$ и выполняется последнее соотношение, то $u(x,y) \equiv 0$.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\Phi_0(z) = (z+i)^{-n_0}$. Тогда

$$\Phi_0^+(x+iy) - \Phi_0^-(x-iy) \notin L^1(\rho),\ 0 < y < 1.$$

Доказательство. Для достаточно больших $|x|$ имеем

$$\left|\Phi_0^+(x+iy) - \Phi_0^-(x-iy)\right| = \frac{\left|(x+iy+i)^{n_0} - (x-iy+i)^{n_0}\right|}{|x+iy+i|^{n_0}\,|x-iy+i|^{n_0}} > \frac{c}{|x+i|^{n_0+1}},$$

где постоянная $c > 0$. Поэтому

$$\left|\Phi_0^{\ +}(x+iy)-\Phi_0^{\ -}(x-iy)\right|\rho(x)>\frac{c}{\left|x+i\right|^{1-\{\alpha\}}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $0\le\delta<1$. Тогда

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\frac{1}{\left|t+i\right|^{\delta}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|x+i\right|^{\delta}ydx}{(x-t)^2+y^2}<\infty, \tag{6}$$

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\frac{1}{\left|t+i\right|^{\delta}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|x+i\right|^{\delta}ydx}{\left|t-x-iy\right|\left|x+i\right|}<\infty. \tag{7}$$

Доказательство. Так как $\left|\left|t+i\right|^{\delta}-\left|x+i\right|^{\delta}\right|<const\left|x-t\right|^{\delta}$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ydx}{(x-t)^2+y^2}=\pi,$$

то

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|x+i\right|^{\delta}ydx}{\left|t+i\right|^{\delta}((x-t)^2+y^2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ydx}{(x-t)^2+y^2}+\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\left|x+i\right|^{\delta}-\left|t+i\right|^{\delta}\right|}{\left|t+i\right|^{\alpha}((x-t)^2+y^2)}dx\le$$

$$\le 1+Ay\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|x-t\right|^{\delta}dx}{\left|t+i\right|^{\delta}((x-t)^2+y^2)}\le 1+\frac{A}{\left|t+i\right|^{\delta}}(I_1(x,y)+I_2(x,y)),$$

где A – постоянная, не зависящая от t и y,

$$I_1(x,y)=\int_{|x|<1}\frac{y\left|x\right|^{\delta}dx}{x^2+y^2},\qquad I_2(x,y)=\int_{|x|>1}\frac{y\left|x\right|^{\delta}dx}{x^2+y^2}.$$

Далее, при $\left|x\right|<1$ $\left|x\right|^{\delta}(x^2+y^2)^{-1}<(x^{2-\delta}+y^2)^{-1}$ и поэтому

$$I_1(x,y)=\int_{|x|<1}\frac{ydx}{x^{2-\delta}+y^2}<\int_{|x|<1}\frac{ydx}{x^2+y^2}=\pi.$$

Соответственно при $\left|x\right|>1$ $\left|x\right|^{\delta}(x^2+y^2)^{-1}<\left|x\right|^{\delta-2}$ и $I_2(x,y)<\int_{|x|>1}\frac{ydx}{x^{2-\delta}}<\infty.$ Таким образом, утверждение (6) доказано. Для доказательства (7) заметим, что

$$\frac{1}{\left|t+i\right|^{\delta}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|x+i\right|^{\delta}ydx}{\left|t-x-iy\right|\left|x+i\right|}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ydx}{\left|t-x-iy\right|\left|x+i\right|}+$$

$$+\frac{1}{\left|t+i\right|^{\delta}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\left|x+i\right|^{\delta}-\left|t+i\right|^{\delta})ydx}{\left|t-x-iy\right|\left|x+i\right|},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ydx}{\left|t-x-iy\right|\left|x+i\right|}<\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ydx}{\left|t-x-iy\right|^2}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ydx}{\left|x+i\right|^2}=2\pi,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left||x+i|^{\delta}-|t+i|^{\delta}\right|ydx}{|t-x-iy||x+i|}<C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ydx}{|t-x-iy|^{1-\delta}\,|x+i|}<C_1\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ydx}{|t-x-iy|^{2-\delta}}+\frac{ydx}{|x+i|^{2-\delta}}\right),$$

где C, C_1 – некоторые постоянные, не зависящие от t и y. Учитывая теперь неравенство $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ydx}{|t-x-iy|^{2-\delta}}<C_2$, где C_2 – постоянная, не зависящая от t и y, завершаем доказательство леммы.

Лемма 4. Пусть $f\in L^1(\rho)$ и

$$\Phi(z)=\frac{1}{(z+i)^{n_0}}\cdot\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t+i)^{n_0}f(t)dt}{t-z}, \tag{8}$$

тогда справедлива оценка

$$\left\|\Phi^+(x+iy)-\Phi^-(x-iy)\right\|_{L^1(\rho)}<C\|f\|_{L^1(\rho)},$$

где C – постоянная, не зависящая от f и y.

Доказательство. Заметим, что $\Phi^+(x+iy)-\Phi^-(x-iy)=J_1(x,y)+J_2(x,y)$, где

$$J_1(x,y)=\frac{(z+i)^{n_0}-(\bar z+i)^{n_0}}{(z+i)^{n_0}(\bar z+i)^{n_0}}\cdot\frac{1}{\pi i}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t+i)^{n_0}f(t)dt}{t-z},$$

$$J_2(x,y)=\frac{1}{(z+i)^{n_0}}\cdot\frac{1}{\pi i}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t+i)^{n_0}f(t)dt}{(x-t)^2+y^2}.$$

Так как $\left|\frac{(z+i)^{n_0}-(\bar z+i)^{n_0}}{(z+i)^{n_0}(\bar z+i)^{n_0}}\right|<C|x+i|^{-n_0-1}$, то

$$\|J_1(x,y)\|_{L^1(\rho)}<C\int_{-\infty}^{\infty}|t+i|^{\alpha}\,|f(t)|\,dt\frac{1}{|t+i|^{\{\alpha\}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x+i|^{\{\alpha\}}dx}{|x+i||t-x-iy|}.$$

Применяя (7), получим $\|J_1(x,y)\|_{L^1(\rho)}<C\|f\|_{L^1(\rho)}$. Аналогичным образом, в силу (6) получим $\|J_{21}(x,y)\|_{L^1(\rho)}<C\|f\|_{L^1(\rho)}$, и лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $f\in L^1(\rho)$ и $\Phi(z)$ – решение задачи (4). Тогда функция f удовлетворяет условиям (2), а $\Phi(z)$ представляется формулой (8).

Доказательство. Из (4) имеем

$$\lim_{y\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left|(x+i)^{n_0}\Phi^+(x+iy)-(x+i)^{n_0}\Phi^-(x-iy)-2(x+i)^{n_0}f(x)\right|\frac{dx}{1+|x|}=0.$$

Положим

$$(x+i)^{n_0}\Phi^+(x+iy)-(x+i)^{n_0}\Phi^-(x-iy)=f_y(x).$$

Обозначив $\Phi^+{}_y(z)=(z+i)^{n_0}\Phi^+(z+iy)$, $\Phi^-{}_y(z)=(z+i)^{n_0}\Phi^-(z-iy)$, будем иметь

$$\Phi_y^{+}(x)-\Phi^{-}{}_y(x)=f_y(x). \tag{9}$$

Так как $\left|\Phi_y(x+iy)\right|<C\left|x+iy\right|^{n_0}$, $f_y\in L^1((1+|x|)^{-1})$, то из (9) получаем (см. [5])

$$\Phi_y(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_y(t)dt}{t-z}+P_y(z),$$

где $P_y(z)$ – некоторый полином порядка n_0. Учитывая теперь, что $f_y(x)\to(x+i)^{n_0}f(x)$ в $L^1((1+|x|)^{-1})$, и переходя к пределу при $y\to 0$ в последнем равенстве, получаем

$$(z+i)^{n_0}\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t+i)^{n_0}f(t)dt}{t-z}+P(z),$$

где $P(z)$ – также полином порядка n_0. Так как левая часть последнего равенства имеет ноль порядка n_0 в точке $z=-i$, то коэффициенты многочлена $P(z)$ удовлетворяют условиям

$$a_k=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)(t+i)^{n_0-k-1}dt,\ k=0,1,...,n_0-1. \tag{10}$$

При выполнении этих условий решение задачи (4) можно представить в виде

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i(z+i)^{n_0}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t+i)^{n_0}f(t)dt}{t-z}+\frac{P(z)}{(z+i)^{n_0}}.$$

Применяя лемму 2 и 4, заключаем, что в последней формуле $P(z)\equiv 0$, тогда

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i(z+i)^{n_0}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t+i)^{n_0}f(t)dt}{t-z}.$$

Согласно (10) также имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)(t+i)^{n_0-k-1}dt=0,\ k=0,1,...,-n_0-1,$$

что равносильно условиям (2).

Лемма 6. Пусть $f\in C^{\alpha}(-\infty;\infty)$ – финитная функция. Для того чтобы задача (1) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла условиям (2).

Доказательство. Если для функции $f\in C^{\alpha}(-\infty;\infty)$ задача (1) имеет решение, то ее можно представить в виде

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{ydt}{(x-t)^2+y^2}. \tag{11}$$

Учитывая лемму 4, достаточно установить, что если выполняются условия (2), то функция (11) удовлетворяет условию (1). Заметим, что

$$u(x,y)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{dt}{t-z}\right),$$

и в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{dt}{t-z}=\frac{A_1}{z^{n_0}}+\frac{A_2}{z^{n_0+1}}+\ldots \quad ,$$

где

$$A_k=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^{n_0+k}dt,\ k=1,2,\ldots \quad ,$$

чисто мнимые числа. Поэтому для достаточно большого $A>0$

$$|u(x,y)|<C\left|\frac{1}{(x+iy)^{n_0+1}}-\frac{1}{(x-iy)^{n_0+1}}\right|<C_1\frac{y}{|x+i|^{n_0+2}},\ |u(x,y)|\rho(x)<C_1\frac{y}{|x+i|^{2-\{\alpha\}}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{y\to 0}\int_{|x|>A} u(x,y)\rho(x)dx=0\,.$$

Далее, учитывая, что $u(x,y)\to f(x)$ равномерно на множестве $|x|<A$, заключаем, что $u(x,y)\to f(x)$ в $L^1(\rho)$.

Лемма доказана.

4. *Теорема 1.* Для того чтобы задача (4) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла условиям (2). Решение единственное и его можно представить в виде (8).

Доказательство. Учитывая лемму 4, достаточно установить, что при условий (2) функция $\Phi(z)$ из (8) удовлетворяет условию (4). Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число и $f_\varepsilon(x)\in C^\gamma(-\infty;\infty)$ – финитная функция такая, что $|f_\varepsilon(x)-f(x)|_{L^1(\rho)}<\varepsilon$, причем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t)t^{n_0-k-1}dt=0,\ k=0,1,\ldots,-n_0-1.$$

Обозначив

$$\Phi_\varepsilon(z)=\frac{1}{(z+i)^{n_0}\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t+i)^{n_0}f_\varepsilon(t)dt}{t-z},$$

в силу леммы 4 будем иметь

$$\left\|\Phi^+(x+iy)-\Phi^-(x-iy)-f(x)\right\|_{L^1(\rho)}<\left\|f-f_\varepsilon\right\|_{L^1(\rho)}+$$

$$+\left\|(\Phi^+(x+iy)-\Phi_\varepsilon{}^+(x+iy))-(\Phi^-(x-iy)-\Phi_\varepsilon{}^-(x-iy))\right\|_{L^1(\rho)}+$$

$$+\left\|\Phi^+(x+iy)-\Phi^-(x-iy)-f(x)\right\|_{L^1(\rho)}<C\left\|f-f_\varepsilon\right\|_{L^1(\rho)}+$$

$$+\left\|\Phi^+(x+iy)-\Phi^-(x-iy)-f(x)\right\|_{L^1(\rho)}.$$

Применяя теперь лемму 5, завершаем доказательство теоремы.

Теорема 2. Задача (1) имеет решение тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет условиям (2). Решение единственное и его можно представить в виде

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i(z+i)^{n_0}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t+i)^{n_0}f(t)dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i(z-i)^{n_0}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t-i)^{n_0}f(t)dt}{t-z}\right).$$

5. Применяя эту теорему, можно получить теорему единственности в классе гармонических функций в полуплоскости.

Теорема 3. Пусть $u(z)$ ограниченная гармоническая функция в верхней полуплоскости и

$$\sup_{\substack{x\in(-\infty,\infty)\\ y\in(0,\infty)}}|u(x,y)|e^{|x|}<\infty, \tag{12}$$

тогда $u(x,y)\equiv 0$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функция $u(z)$ имеет граничные значения почти всюду на действительной оси при $y\to 0$. Обозначив граничную функцию через $f(x)$, в силу (12) будем иметь $f(x)\in L^1(\rho)$ и $\lim\limits_{y\to+0}\|u(x,y)-f(x)\|_{L^1(\rho)}=0$, где $\rho(x)=|x+i|^{-2}e^{-|x|}$. Применяя теорему 2, заключаем, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)t^k dt=0,\ k=0,1,2,\cdots \tag{13}$$

Пусть теперь $F(\lambda)$ – преобразование Фурье функции $f(x)$:

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}f(x)dx.$$

Так как $|f(x)|<Ce^{-|x|}$, где C – некоторая постоянная, то функция $F(\lambda)$ – бесконечно дифференцируема на действительной оси и

$$F^{(k)}(\lambda)=(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}x^k e^{-i\lambda x}f(x)dx.$$

Поэтому

$$\left|F^{(k)}(\lambda)\right|<C\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k e^{-|x|}dx,\ k=0,1,2,...$$

Учитывая теперь, что

$$\int_{0}^{\infty}x^k e^{-|x|}dx=k!,\ k=0,1,2,...\ ,$$

получим $\left|F^{(k)}(\lambda)\right|<Ck!,\ k=0,1,2,...$ Далее, из (13) следует, что $F^{(k)}(0)=0,\ k=0,1,2,...$ Применяя известную теорему Карлемана [6] о квазианалитических классах, заключаем, что $F(\lambda)\equiv 0$. Следовательно, $f(x)\equiv 0$ и $u(x,y)\equiv 0$.

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства,
Иджеванский филиал ЕГУ

Поступила 13.02.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Айрапетян Г.М.** – Математические заметки, 2004, т. 76, вып. 5, с. 643–650.
2. **Kazarian K.S.** – Studia Math., 1987, v. 86, p. 97–130.
3. **Айрапетян Г.М.** – Изв. НАН Армении. Математика, 2001, т. 36, № 3, с. 12–35.
4. **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
5. **Айрапетян Г.М.** – Изв. НАН Армении. Математика, 2001, т. 36, № 6, с. 7–15.
6. **Мандельбройт С.** Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения. М., 1955.

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ա. Վ. ՑՈՒՑՈՒԼՅԱՆ

ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ԿՇՌԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է Դիրիխլեի խնդիրը կիսահարթությունում կշռային տարածություններում: Գտնվել են պայմանները, որոնց դեպքում խնդիրն ունի լուծում: Այդ պայմանների առկայության դեպքում ստացվել է լուծման բացահայտ տեսքը: Ստացվել է նաև միակության թեորեմ հարմոնիկ ֆունկցիաների դասում:

H. M. HAYRAPETYAN, A. V. TZUTZULYAN

ON DIRICHLET PROBLEM IN THE HALF-PLANE IN WEIGHTED SPACES

Summary

A Dirichlet problem in the half-plane in the weighted spaces is investigated. Conditions of solvability of the problem are found. Under these conditions an explicit solution is found. A theorem of uniqueness in the class of harmonic functions is also obtained.