ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 517.9

И. М. КАРАХАНЯН, М. И. КАРАХАНЯН

О СУБНОРМАЛЬНОСТИ В БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ

В настоящей работе доказывается асимптотический вариант классической теоремы фон Неймана–Фугледе–Путнама для субнормальных элементов комплексной банаховой алгебры в широком классе топологий, заданных на данной алгебре.

Введение. Классическая теорема фон Неймана–Фугледе–Путнама устанавливает, что если пара нормальных операторов $\mathcal{N} \in BL(\boldsymbol{H})$, $\mathcal{M} \in BL(\boldsymbol{K})$, действующих соответственно в комплексных гильбертовых пространствах $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{K}$, таковы, что $\mathcal{M}T = T\mathcal{N}$ для некоторого $T \in BL(\boldsymbol{H},\boldsymbol{K})$, то $\mathcal{M}^*T = T\mathcal{N}^*$.

Данный результат, широко применяющийся в спектральной теории и теории аппроксимаций, имеет многочисленные обобщения (см. [1–8]). С другой стороны, в [9] показано, что если a, b, x – элементы комплексной банаховой алгебры A с единицей, причем $[a,b] = ab - ba = 0$, $\| \exp(ita) \| = o(|t|^{1/2})$, $\| \exp(itb) \| = o(|t|^{1/2})$ при $|t| \to \infty$, $t \in \boldsymbol{R}$, и $[a+ib, x] = 0$, то $[a-ib, x] = 0$.

Отметим, что данный результат является точным (см. [10]), т.е. условие $o(|t|^{1/2})$ нельзя заменить на $O(|t|^{1/2})$.

В настоящей работе продолжается исследование в контексте работ [9, 10] для субнормальных элементов в комплексной банаховой алгебре.

1. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей (предполагается, что $\| \mathbf{1} \| = 1$ и $\| xy \| \le \| x \| \cdot \| y \|$ для всех $x, y \in A$). $\boldsymbol{C}$-линейный функционал $\phi : A \to \boldsymbol{C}$ называется *состоянием*, если $\| \phi \| = \phi(\mathbf{1}) = 1$. Множество всех состояний $st(A)$ составляет $\sigma(A^*, A)$-компактное, выпуклое подмножество сопряженного пространства A^*. Множество $V_A(a) = \{\phi(a) : \phi \in st(A)\}$ называется алгебраическим числовым образом элемента $a \in A$, который является выпуклым компактом в $\boldsymbol{C}$.

Напомним, что комплексная банахова алгебра B называется *банаховым расширением* для банаховой алгебры A, если A является подалгеброй алгебры B, единичный элемент $\mathbf{1} \in A$ является единичным элементом для B и сужение нормы B на алгебре A эквивалентно норме в алгебре A. Так как отображение сужения $\phi \to \phi\big|_A$ есть отображение $st(B)$ на $st(A)$ (в силу теоремы Хана–Банаха), то для каждого элемента $a \in A$ имеем $V_A(a) = V_B(a)$. Отметим, что элемент $\boldsymbol{h} \in A$ называется *квазиэрмитовым*, если $\left\|\exp(it\boldsymbol{h})\right\| = o(|t|^{1/2})$ при $|t| \to \infty$, $t \in \boldsymbol{R}$. В случае когда $\|\exp(it\boldsymbol{h})\| = 1$ для всех $t \in \boldsymbol{R}$, элемент $\boldsymbol{h}$ называется *эрмитовым*. Условие эрмитовости элемента $\boldsymbol{h}$ равносильно условию $V(\boldsymbol{h}) \in \boldsymbol{R}$ [11]. Множество всех эрмитовых элементов $\mathcal{H}(A)$ есть замкнутое $\boldsymbol{R}$-линейное подпространство в алгебре A. Элемент $a \in A$ называется *эрмитовразложимым*, если он допускает представление $a = \boldsymbol{h} + i\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} \in \mathcal{H}(A)$. Заметим, что такое представление единственно, если оно существует. Совокупность всех эрмитовразложимых элементов алгебры A обозначается через $\mathcal{H}_{\boldsymbol{C}}(A)$, что есть замкнутое $\boldsymbol{C}$-линейное подпространство в A.

Если элемент $a = \boldsymbol{h} + i\boldsymbol{k}$ и $[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}] = 0$, где $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} \in A$ есть квазиэрмитовы элементы, то a называтеся *квазинормальным*, а если элементы $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} \in \mathcal{H}(A)$, то элемент a называется *нормальным*.

Элемент $a \in A$ назовем *субквазинормальным*, если существует такое банахово расширение B алгебры A, где элемент a является квазинормальным, т.е. существует элемент $b \in B$ такой, что $[a,b] = 0$ и $\|\exp(\bar{\lambda} a - \lambda b)\|_B = o(|\lambda|^{1/2})$ при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$. Если $\|\exp(\bar{\lambda} a - \lambda b)\|_B = 1$ для всех $\lambda \in \boldsymbol{C}$, то элемент a назовем *субнормальным*. Элемент $\boldsymbol{h} \in A$ назовем *субэрмитовым*, если существует такое банахово расширение B алгебры A, что $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}(B)$.

Нетрудно видеть, что для субэрмитова элемента $\boldsymbol{h}$ его спектральный радиус эквивалентен норме.

Хорошо известно [11], что для любого элемента $a \in A$ спектр $sp(a) \subset V(a)$, поэтому его выпуклая оболочка $\langle sp(a) \rangle \subset V(a)$. Вместе с тем, если элемент $a \in A$ нормален, то $\langle sp(a) \rangle = V(a)$.

Теорема 1. Пусть $a \in A$ – субнормальный элемент, тогда $\langle sp(a) \rangle = V(a)$.

Доказательство. Так как элемент $a \in A$ является субнормальным, то $sp_B(a) \subset sp_A(a)$ и, более того, $sp_A(a) = sp_B(a) \cup \left(\bigcup_j W_j \right)$, где W_j – некоторые ограниченные компоненты $\boldsymbol{C} \setminus sp_B(a)$. Отсюда следует, что $\langle sp_B(a) \rangle \subset \langle sp_A(a) \rangle \subset V_A(a)$. Но так как $V_A(a) = V_B(a)$ и $V_B(a) = \langle sp_B(a) \rangle$, то $\langle sp_A(a) \rangle = V_A(a)$.

Теорема доказана.

Отметим, что если элемент $a \in A$ субнормален и $a = \boldsymbol{h} + i\boldsymbol{k}$, то $a \in (A \bigcap \mathcal{H}_{\boldsymbol{C}}(B) \setminus \mathcal{H}_{\boldsymbol{C}}(A))$.

Теорема 2. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и $a_1, a_2 \in A$ – субквазинормальные элементы. Тогда для $\varepsilon > 0$ и $R > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если для $x \in A$ с $\| x \| \le R$ и $\| a_1 x - x a_2 \|_A < \delta$, то $\| b_1 x - x b_2 \|_B < \varepsilon$, где B – банахово расширение алгебры A, содержащее элементы b_1, b_2.

Доказательство. Не ограничивая общность, можем считать, что $\| a_1 \|$, $\| a_2 \| \le 1$ и $\| b_1 \|_B$, $\| b_2 \|_B \le 1$, $R = 1$. Пусть элемент $x \in A$, $\| x \| \le R$ и $\| a_1 x - x a_2 \|_A = \eta$. Так как при каждом натуральном p, q $a_1^p x a_2^q \in A$, то в силу индукции $\| a_1^k x - x a_2^k \|_A < k\eta$ при каждом натуральном k.

Тогда для каждого $\lambda \in \boldsymbol{C}$ $\left\| e^{\bar{\lambda} a_1} x - x e^{\bar{\lambda} a_2} \right\| \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{|\lambda|^k}{k!} \left\| a_1^k x - x a_2^k \right\|_A \le \eta |\lambda| e^{|\lambda|}$.

Рассмотрим B-значную целую функцию $F(\lambda) = e^{\lambda b_1} x e^{-\lambda b_2}$. Так как

$$\left\| e^{\lambda b_1} \left(e^{-\bar{\lambda} a_1} x - x e^{-\bar{\lambda} a_2} \right) e^{\bar{\lambda} a_2} e^{-\lambda b_2} \right\|_B \le \eta |\lambda| e^{4|\lambda|} \quad \text{и}$$

$$F(\lambda) = e^{\lambda b_1 - \bar{\lambda} a_1} x e^{\bar{\lambda} a_2 - \lambda b_2} - \left[e^{\lambda b_1} \left(e^{-\bar{\lambda} a_1} x - x e^{-\bar{\lambda} a_2} \right) e^{\bar{\lambda} a_2} e^{-\lambda b_2} \right],$$

то $\left\| F(\lambda) \right\|_B \le o(|\lambda|) + \eta |\lambda| e^{4|\lambda|}$.

В силу интегральной формулы Коши

$$F'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda,$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – замкнутая жорданова кривая, внутри которой находится начало координат. Выбирая вместо $\boldsymbol{\gamma}$ окружность $\boldsymbol{\gamma}_r$ радиуса r с центром в начале координат, получим

$$\| F'(0) \|_B \le \frac{o(r)}{r} + \eta e^{4r}.$$

Таким образом, если для $\varepsilon > 0$ выбрать r таким, что $\dfrac{o(r)}{r} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} e^{-4r}$, то при $\eta \le \delta$ имеем $\| b_1 x - x b_2 \|_B < \varepsilon$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и $a_1, a_2 \in A$ – субквазинормальные элементы. Если для некоторого элемента $x \in A$ $a_1 x = x a_2$, то $b_1 x = x b_2$.

Следствие 2. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и $a_1, a_2 \in A$ – субнормальные элементы. Если для некоторого элемента $x \in A$ $a_1 x = x a_2$, то $b_1 x = x b_2$.

Следствие 3. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и $a_1, a_2 \in A$ – субнормальные элементы. Если для некоторого элемента $x \in A$ $a_1 x = x b_2$, то $b_1 x = x a_2$.

Теперь рассмотрим топологический вариант вышеуказанных результатов для широкого класса топологий, заданных на комплексной банаховой алгебре.

Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и B – некоторое ее банахово расширение. Пусть Y – пространство $\boldsymbol{C}$-линейных непрерывных функционалов, разделяющее элементы алгебры B (т.е. $Y \subset B^*$). В этом случае говорят, что $\langle B, Y \rangle$ – дуальная пара. Напомним (см. [12]), что пространство Y называлось B-инвариантным, если для каждого функционала $\phi \in Y$ и произвольных элементов $a, b \in B$ функционал $\phi_{a,b} \in Y$, где $\phi_{a,b}(x) = \phi(axb)$. При этом дуальная пара $\langle B, Y \rangle$ будет называться B-инвариантом.

На алгебре B вместе с исходной рассмотрим также Y-слабую топологию $\sigma(B, Y)$, т.е. слабейшую топологию на B, в которой все функционалы из Y и только они непрерывны.

На алгебре B рассмотрим также топологию равномерной сходимости на $\sigma(Y, B)$-ограниченных подмножествах Y, которую обозначим через $\beta(B, Y)$. Пусть $\Sigma(Y, B)$ – класс всех $\sigma(Y, B)$-ограниченных подмножеств Y. Отметим, что $\beta(B, Y)$ – локально выпуклая топология на B, которая порождается семейством полунорм $\{P_K\}$, $K \in \Sigma(Y, B)$, где $P_K(x) = \sup\limits_{\phi \in K} |\phi(x)|$, причем база окрестностей нуля задается множеством вида

$$U = U(K_{\alpha_1}, \ldots, K_{\alpha_m}; \varepsilon) = \left\{ x \in B : \sup_{\phi \in K_{\alpha_p}} |\phi(x)| < \varepsilon,\ K_{\alpha_p} \in \Sigma(Y, B);\ p = 1, \ldots, m \right\}.$$

Теорема 3. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и $a_1, a_2 \in A$ – субквазинормальные элементы. Пусть $\langle B, Y \rangle$ есть B-инвариантная дуальная пара и $\beta(B, Y)$ – локально-выпуклая топология на B, согласованная с двойственностью $\langle B, Y \rangle$, где B – некоторое банахово расширение алгебры A, содержащее элементы b_1, b_2. Тогда для каждой окрестности нуля U в топологии $\beta(B, Y)$ существует такая окрестность нуля V (в той же топологии), что из условий $x \in A$, $\| x \| \le 1$ и $a_1 x - x a_2 \in V$ следует $b_1 x - x b_2 \in U$.

Доказательство. Так как K_{α_p} есть $\sigma(Y, B)$-ограниченные множества в Y, то существует такое $M > 0$, что для всех $\phi \in \bigcup\limits_{p=1}^{m} K_{\alpha_p}$ $\| \phi \| \le M$. Можно считать, не ограничивая общности, что $\| a_j \| \le 1$, $\| b_j \| \le 1$, где $j = 1, 2$. Пусть $\omega(r) = \max\limits_{j=1,2} \max\limits_{|\lambda| = r} \| e^{\bar{\lambda} a_j - \lambda b_j} \|_B$. Ввиду того, что $\omega(r) = o(\sqrt{r})$, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $r > 0$ такое, что

$$\frac{M\{[\omega(r)+1]^2+1\}}{r}<\varepsilon .$$

Пусть $\boldsymbol{\gamma}_r=\{\lambda\in \boldsymbol{C}:|\lambda|=r\}$. Выберем натуральное число n таким, что $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{r^k}{k!}<e^{-r}$. Рассмотрим окрестность нуля

$$U=U(K_{\alpha_1},\ldots,K_{\alpha_m};\varepsilon)=\left\{x\in B:\sup_{\phi\in K_{\alpha_p}}|\phi(x)|<\varepsilon,\, где\; K_{\alpha_p}\in\Sigma(y,B);\, p=1,\ldots,m\right\}.$$

Пусть $h_j(\lambda)=\exp(\lambda b_j)$, где $j=1,2$. Тогда $h_j(\lambda)$ – равномерно-непрерывные функции от λ на $\boldsymbol{\gamma}_r$ со значениями в B. Поэтому существует такое конечное множество $\mathcal{F}\subset\boldsymbol{\gamma}_r$, что для каждого $\lambda\in\boldsymbol{\gamma}_r$ при подходящем $\gamma\in\mathcal{F}$

$$\|h_1(\lambda)-h_1(\gamma)\|_B+\|h_2(-\lambda)-h_2(-\gamma)\|_B\le e^{-r}.$$

Пусть $\delta=\frac{M}{r}e^{-r}$ и

$$V=\left\{y\in A:\sup\left|\tilde{\phi}_\gamma\left(a_1^{k-l-1}ya_2^l\right)\right|<\delta;\gamma\in\mathcal{F}, l=0,\ldots k;\, k=0,\ldots,n;\, p=1,\ldots,m\right\},$$

где $\tilde{\phi}_\gamma(z)=\phi(e^{\gamma b_1}ze^{-(\gamma b_2-\gamma a_2)})$, а $\phi\in\bigcup\limits_{p=1}^{m}K_{\alpha_p}$. В силу B-инвариантности дуальной пары $\langle B,Y\rangle$ функционал $\tilde{\phi}_\gamma\in Y$. Пусть $x\in A$, $\|x\|\le 1$ и $a_1x-xa_2\in V$. Для $\phi\in\bigcup\limits_{p=1}^{m}K_{\alpha_p}$ рассмотрим целую функцию $f_\phi(\lambda)=\phi(h_1(\lambda)xh_2(-\lambda))$. Так как $\|h_j(\lambda)\|_B\le e^r$, то для $\lambda,\gamma\in\boldsymbol{\gamma}_r$, где $\gamma\in\mathcal{F}$, имеем

$$\|f_\phi(\lambda)-f_\phi(\gamma)\|_B\le\|\phi\|\{\|h_1(\lambda)-h_1(\gamma)\|_B+\|h_2(-\lambda)-h_2(-\gamma)\|_B\}e^r\le M,$$

откуда $\left\|f_\varphi\right\|_r=\max\left\{\left|f_\varphi(\gamma)\right|:\gamma\in\mathcal{F}\right\}+M$. Нетрудно видеть, что для $\gamma\in\mathcal{F}$

$$|f_\phi(\gamma)|\le\|\phi\|[\omega^2(r)+2\omega(r)]+\sum_{k=0}^{n}\frac{r^k}{k!}\left\{\sum_{l=0}^{k-1}\left|\tilde{\phi}_\gamma\left(a_1^{k-l-1}(a_1x-xa_2)a_2^l\right)\right|\right\}.$$

Так как $a_1x-xa_2\in V$, то $\sum\limits_{l=0}^{k-1}\left|\tilde{\phi}_\gamma\left(a_1^{k-l-1}\left(a_1x-xa_2\right)a_2^l\right)\right|<k\delta$, откуда $|f_\phi(\gamma)|\le M[\omega(r)+1]^2$. В итоге имеем, что $\sup\limits_{\phi\in K_{\alpha_p}}\|f_\phi\|_r\le M\{[\omega(r)+1]^2+1\}$, где $p=1,\ldots,m$. В силу формулы Коши $f_\phi'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f_\phi(\lambda)}{\lambda^2}d\lambda$, имеем

$$\sup_{\phi\in K_{\alpha_p}}|f_\phi'(0)|\le\frac{M\{[\omega(r)+1]^2+1\}}{r},\text{ где } p=1,\ldots,m$$

Но так как $f_\phi'(0)=\phi(b_1x-xb_2)$, то получаем, что $\sup\limits_{\phi\in K_{\alpha_p}}|\phi(b_1x-xb_2)|<\varepsilon$, где

$p=1,\dots,m$, т.е. $b_1x-xb_2\in U$.

Теорема доказана.

Пусть $\langle B,Y\rangle$ – дуальная пара и æ(B,Y) – локально-выпуклая топология на B, согласованная с двойственностью $\langle B,Y\rangle$. Другими словами, топологически сопряженное $(B;$ æ$(B,Y))$ совпадает с Y.

Теорема 4. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и $a_1,a_2\in A$ – субквазинормальные элементы. Пусть $\langle B,Y\rangle$ есть B-инвариантная дуальная пара и æ(B,Y) – локально-выпуклая топология на B, согласованная с двойственностью $\langle B,Y\rangle$, где B – некоторое банахово расширение алгебры A, содержащее элементы b_1, b_2. Тогда для каждой окрестности нуля U в топологии æ(B,Y) существует такая окрестность нуля V (в той же топологии), что из условий $x\in A$, $\|x\|\le 1$ и $a_1x-xa_2\in V$ следует $b_1x-xb_2\in V$.

Доказательство теоремы 4 следует из теоремы 3 и теоремы о биполяре (см. [12], стр. 160–162), согласно которым топология æ(B,Y) согласована с двойственностью $\langle B,Y\rangle$, т.е. является топологией равномерной сходимости на классе æ-равностепенно-непрерывных подмножеств Y. В силу теоремы Хана–Банаха æ(B,Y) состоит в точности из множеств относительно компактных в топологии $\sigma(Y,B)$.

В случае когда $Y=B^*$, $\langle B,B^*\rangle$ есть B-инвариантная дуальная пара, мы имеем

Следствие 4. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и $a_1,a_2\in A$ – субквазинормальные элементы. Пусть æ(B,B^*) – локально-выпуклая топология на B, согласованная с двойственностью $\langle B,B^*\rangle$, где B – некоторое банахово расширение алгебры A, содержащее элементы b_1, b_2. Тогда для каждой окрестности нуля U в топологии æ(B,B^*) существует такая окрестность нуля V (в той же топологии), что из условий $x\in A$, $\|x\|\le 1$ и $a_1x-xa_2\in V$ следует $b_1x-xb_2\in U$.

2. Будем говорить, что элемент $a\in A$ принадлежит классу $SGr(A)$, если существует такое банахово расширение B алгебры A и в нем элемент $b\in B$, что $\max\{\|e^{-\lambda b}e^{\bar\lambda a}\|_B;\|e^{-\bar\lambda a}e^{\lambda b}\|_B\}=o(|\lambda|^{1/2})$ при $|\lambda|\to\infty$, $\lambda\in\boldsymbol{C}$.

Теорема 5. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и элемент $a\in SGr(A)$. Если элемент $x\in A$ такой, что $[a,x]=0$, то $[b,x]=0$.

Доказательство. Пусть $\phi\in st(B)$. Рассмотрим функцию $F_x(\lambda,\bar\lambda)=\phi(e^{-\lambda b}e^{\bar\lambda a}xe^{-\bar\lambda a}e^{\lambda b})$. Так как $\dfrac{\partial F_x}{\partial\bar\lambda}=\phi(e^{-\lambda b}e^{\bar\lambda a}[a,x]e^{-\bar\lambda a}e^{\lambda b})$ и $[a,x]=0$, то $\dfrac{\partial F_x}{\partial\bar\lambda}=0$, т.е. $F_x(\lambda,\bar\lambda)$ не зависит от $\bar\lambda$ и, следовательно, есть целая функция по λ. Этот факт следует также из того, что если $[a,x]=0$, то $x=e^{\bar{\lambda}a}xe^{-\bar{\lambda}a}$, и поэтому

$$F_x(\lambda,\bar{\lambda})=f_x(\lambda)=\phi(e^{-\lambda b}xe^{\lambda b}).$$

Так как $|f_x(\lambda)|\leq\|x\|\cdot\|e^{-\lambda b}e^{\bar{\lambda}a}\|_B\cdot\|e^{-\bar{\lambda}a}e^{\lambda b}\|_B=o(|\lambda|)$ при $|\lambda|\to\infty$, $\lambda\in\boldsymbol{C}$, то в силу теоремы Лиувилля $f_x(\lambda)=f_x(0)$. Но тогда $\dfrac{\partial f_x}{\partial\lambda}=0=-\phi(e^{-\lambda b}[b,x]e^{\lambda b})$, откуда $\phi([b,x])=0$ и $[b,x]=0$.

Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и элемент $a\in SGr(A)\bigcap H_{\boldsymbol{C}}(B)$. Если элемент $x\in A$ такой, что $[a,x]=0$, то $[a^+,x]=0$.

Теорема 6. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и элемент $a\in SGr(A)$. Если элемент $x\in A$ такой, что $ax=xb$, то $bx=xa$.

Доказательство. Пусть $\phi\in st(B)$. Рассмотрим, как и выше, функцию

$$G_x(\lambda,\bar{\lambda})=\phi(e^{-\lambda b}e^{\bar{\lambda}a}xe^{-\bar{\lambda}b}e^{\lambda a}).$$

Из аналогичных рассуждений (см. теорему 5) имеем, что $\dfrac{\partial G_x}{\partial\bar{\lambda}}=0$. Поэтому функция $g_x(\lambda)=G_x(\lambda,\bar{\lambda})=\phi(e^{-\lambda b}xe^{\lambda a})$ есть целая функция по λ и из условий $ax=xb$ и $a\in SGr(A)$ следует, что $bx=xa$.

Теорема доказана.

Следствие 6. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и $a\in SGr(A)\bigcap H_{\boldsymbol{C}}(B)$. Если элемент $x\in A$ такой, что $ax=xa^+$, то $a^+x=xa$.

Кафедра дифференциальных уравнений,
кафедра механики сплошной среды

Поступила 11.06.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фон Нейман Д.** Избр. труды по функциональному анализу. Т. 1. М.: Наука, 1987, с. 277–327.
2. **Fuglede B.** – Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1950, v. 36, p. 35–40.
3. **Putnam C.R.** – Amer. J. Math., 1951, v. 73, p. 357–362.
4. **Berberyan S.K.** – Proc. Amer. Math. Soc., 1959, v. 10, p. 175–182.
5. **Moore R.** – Proc. Amer. Math. Soc., 1975, v. 50, p. 138–148.
6. **Rogers D.D.** – Proc. Amer. Math. Soc., 1979, v. 75, p. 32–36.
7. **Weiss G.** – Amer. Math. Soc., 1981, v. 8, p. 186–189.
8. **Шейнберг М.В.** – УМН, 1977, т. 32, вып. 5(197), с. 203–204.
9. **Горин Е.А., Караханян М.И.** – Матем. заметки, 1977, т. 22, № 2, с. 179–188.
10. **Gorin E.A.** – Algebra and Analysis, 1993, v. 5, № 5, p. 83–97.
11. **Bonsall F.F., Duncan D.** Complete Normed Algebras. Springer, 1973.
12. **Караханян М.И.** – Изв. НАН Армении. Математика, 1994, XXIX, № 1, с. 50–57.

Ի. Մ. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ, Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ

ՍՈՒԲՆՈՐՄԱԼՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԱՆԱԽՅԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎՈՒՄ

Ամփոփում

Տվյալ աշխատանքում ապացուցվում է ֆոն Նեյմանի–Ֆուգլեդեի–Պուտնամի դասական թեորեմի ասիմպտոտիկ տարբերակը կոմպլեքս բանախյան հանրահաշվի սուբնորմալ տարրերի համար այդ հանրահաշվում տրված լայն տոպոլոգիաների դասում:

I. M. KARAKHANYAN, M. I. KARAKHANYAN

SUBNORMALITE OF BANACH ALGEBRA

Summary

In this paper von Neumann–Fuglede–Putnam's asymptotic theorem is proved for subnormal elements in complex Banach algebra in topology of wide classes.