ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 517.9

А. А. ПЕТРОСЯН

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В статье исследуется псевдопараболическая вариационная задача. Устанавливается ее однозначная разрешимость в смысле слабого решения. Доказывается разрешимость начально-краевой задачи для псевдопараболических уравнений второго порядка, эквивалентной вариационной задаче.

Введение. В теории вариационных неравенств в основном изучаются эллиптические и параболические вариационные неравенства [1–4], которые получаются при исследовании различных начально-краевых задач.

Пусть A – эллиптический оператор второго порядка. Для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \tag{1}$$

начально-краевая задача

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u\big|_{\Sigma} \geq 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_{\Sigma} \geq 0, \quad u\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_{\Sigma} = 0 \tag{2}$$

приводит к следующей задаче вариационных неравенств.

Найти $u \in K$, для которого справедливо неравенство

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + \left(\overline{A}u, v-u\right) \geq \left(f, v-u\right) \tag{3}$$

для всех $v \in K$, где $K = \left\{ u \in L_2((0,T), W_2^1(\Omega)) : u\big|_{\Sigma} \geq 0 \right\}$.

В работах [1–3] доказано существование и единственность решения задачи (3) при некоторых условиях, поставленных на оператор A. Псевдопараболические вариационные задачи исследованы в работах [5, 6].

В настоящей же работе изучается разрешимость аналогичного вариационного неравенства для псевдопараболических уравнений, а также разрешимость соответствующей начально-краевой задачи.

§ 1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ и $T > 0$. Обозначим через $Q = \Omega \times (0,T)$

цилиндр с основанием Ω, а его боковую поверхность – через $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. Пусть $U = L_2((0,T), W_2^1(\Omega))$, а $K = \{u \in U, u|_\Sigma \geq 0\}$ – выпуклый конус с вершиной в 0. Классическая параболическая вариационная задача второго порядка состоит в следующем: найти $u \in K$ такое, чтобы $\frac{\partial u}{\partial t} \in U'$, $u(x,0) = 0$ и выполнялось неравенство

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + (\overline{A}u, v-u) \geq (f, v-u) \text{ для всех } v \in K, \tag{1.1}$$

где $(\overline{A}u, v) = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^n a_i(\nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i} dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega cuvdxdt$.

В данной статье исследуется разрешимость следующей псевдопараболической задачи.

Найти $u \in K$ такое, что

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \in U, \\ (L\frac{\partial u}{\partial t}, v-u) + (Mu, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K, \\ u(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

где L и M – операторы, действующие из пространства U в U' по формулам

$$(Lu, v) = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega a_0(x) uvdxdt, \tag{1.3}$$

$$(Mu, v) = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^n b_i(\nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i} dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega cuvdxdt, \quad c > 0. \tag{1.4}$$

Функции $a_{ij}(x)$ непрерывны на $\overline{\Omega}$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad i,j = 1,...,n$, и

$$\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in R^n, \alpha > 0 \text{ и } a_0(x) \geq d > 0. \tag{1.5}$$

Функции $b_i(\xi)$ – липшиц-непрерывны и

$$\sum\limits_{i=1}^n (b_i(\xi) - b_i(\eta))(\xi_i - \eta_i) \geq \beta |\xi - \eta|^2, \beta > 0. \tag{1.6}$$

То есть L – линейный эллиптический оператор, а M – нелинейный монотонный оператор. Классическая задача (1.1) является частным случаем задачи (1.2), когда

$$a_{ij}(x) = 0 \text{ для всех } i,j = 1,...,n \text{ и } a_0(x) = 1.$$

Пусть $D = \left\{u \in U, \frac{\partial u}{\partial t} \in U, u(x,0) = 0\right\}$. Заметим, что D всюду плотно в U.

Постановка сильной задачи: найти $u \in K \cap D$ такое, что

$$\left(L\frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right)+(Mu, v-u)\geq (f, v-u) \quad \forall v\in K. \tag{1.7}$$

Постановка слабой задачи: найти $u\in K$ такое, что

$$\left(L\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right)+(Mu, v-u)\geq (f, v-u) \quad \forall v\in K\bigcap D. \tag{1.8}$$

Решение задачи (1.7) назовем сильным решением, а решение (1.8) – слабым.

Теорема 1.1. Если u является сильным решением, то оно также является и слабым решением.

Сначала докажем лемму, которая будет использована и в доказательстве теоремы, и в последующих главах статьи.

Лемма 1.1. $\left(L\frac{\partial \phi}{\partial t}, \phi\right)\geq 0$ для всех $\phi\in D$.

Доказательство. Для всех $\phi\in D$ справедливо:

$$\left(L\frac{\partial \phi}{\partial t}, \phi\right)=\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dxdt+\int_0^T\int_\Omega a_0(x)\frac{\partial\phi}{\partial t}\phi dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial t}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dxdt+\int_\Omega\int_0^T a_0(x)\frac{\partial\phi}{\partial t}\phi dtdx=\int_\Omega\int_0^T\sum_{i,j=1}^n\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)dtdx+$$

$$+\int_\Omega\int_0^T a_0(x)\phi d\phi dx=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n\left(a_{ij}(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)\right)\Big|_0^T dx+\frac{1}{2}\int_\Omega (a_0(x)\phi^2)\Big|_0^T dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n\left(a_{ij}(x)\frac{\partial\phi(x,T)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\phi(x,T)}{\partial x_j}\right)\right)dx-\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n\left(a_{ij}(x)\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial x_j}\right)\right)dx+$$

$+\frac{1}{2}\int_\Omega a_0(x)\phi^2(x,T)dx-\frac{1}{2}\int_\Omega a_0(x)\phi^2(x,0)dx\geq 0$. Так как $\phi\in D$, то в силу (1.5)

- $\sum_{i,j=1}^n\left(a_{ij}(x)\frac{\partial\phi(x,T)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\phi(x,T)}{\partial x_j}\right)\geq 0$, $a_0(x)\phi^2(x,T)\geq 0$,
- $\sum_{i,j=1}^n\left(a_{ij}(x)\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial x_j}\right)=0$, $a_0(x)\phi^2(x,0)=0$.

Лемма 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.1.

Допустим, что u – решение задачи (1.7). Так как (1.7) справедливо для всех v из K, оно будет справедливо и для всех $v\in K\bigcap D$. Для таких v

$$\left(L\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right)+(Mu, v-u)-(f, v-u)=$$

$$=\left(L\frac{\partial (v-u)}{\partial t}, v-u\right)+\left(L\frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right)+(Mu, v-u)-(f, v-u).$$

Так как и u, и v принадлежат $K\bigcap D$, то $(u-v)\in D$ и, следовательно, по лемме 1.1 $\left(L\dfrac{\partial(v-u)}{\partial t}, v-u\right)\geq 0$. А неравенство $\left(L\dfrac{\partial u}{\partial t}, v-u\right)+(Mu,v-u)-(f,v-u)\geq 0$ следует из того, что u является решением задачи (1.7).

Отсюда следует, что $\left(L\dfrac{\partial v}{\partial t}, v-u\right)+(Mu,v-u)\geq(f,v-u)\quad\forall v\in K\bigcap D$.

Теорема 1.1 доказана.

Отныне решение задачи (1.2) будет трактоваться в смысле (1.8).

§ 2. Существование и единственность слабого решения. В этом параграфе будут исследованы некоторые свойства операторов $\dfrac{\partial}{\partial t}$, L и M, с помощью которых будет доказана теорема существования и единственности решения слабой задачи.

Определение 2.1. Семейство операторов $\{G(s):s\geq 0\}$ называется линейной полугруппой, определенной над банаховым пространством V, если $G(s):V\to V$ является непрерывным линейным оператором для всех $s\geq 0$ и

$$G(0)=I, G(s+t)=G(s)G(t)\quad\forall s,t\geq 0,$$
$$G(\cdot)x\in C([0,\infty),V)\quad\forall x\in V.$$

Определение 2.2. Обозначим $D(A)=\left\{x\in V:\exists\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{G(h)x-x}{h}\right\}$. Генератором полугруппы $G(s)$ называется оператор $A:D(A)\to V$, $A=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{G(h)x-x}{h}$.

Нетрудно проверить, что оператор $\left(-\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ является генератором для линейной полугруппы

$$G(s)\phi(t)=\begin{cases}0, & t<s,\\ \phi(t-s), & t\geq s.\end{cases}\tag{2.1}$$

Определение 2.3. Пусть V – рефлексивное банахово пространство. Оператор $A:V\to V'$ называется *коэрцитивным*, если справедливо $\dfrac{(Au,u-u_0)}{\|u\|}\underset{\|u\|\to\infty}{\to}\infty$ для некоторого $u_0\in V$.

Определение 2.4. Пусть V – рефлексивное банахово пространство. Оператор $A:V\to V'$ называется *псевдомонотонным*, если он ограничен, и из слабой сходимости последовательности $u_n\to u$ в пространстве V и условия $\overline{\lim}(Au_n,u_n-u)\leq 0$ вытекет, что $\underline{\lim}(Au_n,u_n-v)\geq(Au,u-v)$.

Лемма 2.1. Оператор M является псевдомонотонным и коэрцитивным оператором.

Доказательство. Покажем, что M – сильно монотонный, слабо непрерывный и ограниченный оператор.

1. Оператор M сильно монотонный.

$$(Mu-Mv,u-v)=\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n b_i(\nabla u)\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}dxdt+\int_0^T\int_\Omega cu(u-v)dxdt-\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n b_i(\nabla v)\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega cv(u-v)dxdt=\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n (b_i(\nabla u)-b_i(\nabla v))\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dxdt+\int_0^T\int_\Omega c(u-v)^2dxdt\overset{(1.6)}{\ge}$$

$$\ge\int_0^T\int_\Omega c(u-v)^2dxdt+\int_0^T\int_\Omega\beta\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\right)^2dxdt\ge\min(c,\beta)\,||u-v||^2.$$

2. Оператор M слабо непрерывный.

Пусть последовательность u_n из U такая, что $u_n\to u\in U$. Покажем, что $(Mu_n-Mu,v)\to 0$. Из $u_n\underset{n\to\infty}{\to}u$ следует, что $\|u_n-u\|_{L_2}\underset{n\to\infty}{\to}0$, $\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_2}$, $i=1,...,n$.

$$(Mu_n-Mu,v)=\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n (b_i(\nabla u_n)-b_i(\nabla u))\frac{\partial v}{\partial x_i}dxdt+\int_0^T\int_\Omega c(u_n-u)vdxdt\overset{(1.6)}{\le}$$

$$\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n K\left|\nabla u_n-\nabla u\right|\frac{\partial v}{\partial x_i}dxdt+\int_0^T\int_\Omega c(u_n-u)vdxdt\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

3. Оператор M ограниченный.

Пусть $\|u\|_U\le R\Rightarrow\|u\|_U^2\le R^2\Rightarrow\int_0^T\left(\|u(t)\|_{L_2}^2+\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial u(t)}{\partial x_i}\right\|_{L_2}^2\right)dt\le R^2$.

Тогда

$$\|Mu\|_{U'}=\sup_{\|v\|_U=1}(Mu,v)=\sup_{\|v\|_U=1}\left(\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n b_i(\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_i}dxdt+\int_0^T\int_\Omega cuvdxdt\right)\le$$

$$\le\sup_{\|v\|=1}\left(\left(\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n(b_i(\nabla u))^2dxdt\right)^{1/2}\left(\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2dxdt\right)^{1/2}+\left(\int_0^T\int_\Omega(cu)^2dxdt\right)^{1/2}\left(\int_0^T\int_\Omega v^2dxdt\right)^{1/2}\right)\le$$

$$\le const\cdot\sup_{\|v\|=1}\left(\left(\int_0^T\int_\Omega v^2+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2dxdt\right)^{1/2}\right)=const\cdot\sup_{\|v\|=1}(||v||)<+\infty.$$

Из того, что M – сильно монотонный, слабо непрерывный и ограниченный оператор, следует, что M – псевдомонотонный оператор [1]. А коэрцитивность оператора M следует из его сильной монотонности [7].

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. Оператор L непрерывный.

Доказательство. Пусть $u_n\to u$ в U. Нужно доказать, что $Lu_n\to Lu$ в U'. Имеем, что $\forall\varepsilon>0\ \exists k_0$ такое, что из $k>k_0\Rightarrow\|u-u_k\|<\varepsilon$ или

$$\int_0^T\int_\Omega\left(\left(u-u_k\right)^2+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial(u-u_k)}{\partial x_i}\right)^2\right)dxdt<\varepsilon. \text{ Так что}$$

$$\left|(Lu-Lu_k,v)\right|=\left|\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial(u-u_k)}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}dxdt+\int_0^T\int_\Omega a_0(x)(u-u_k)vdxdt\right|\le$$

$$\le c\left(\sum_{i,j=1}^n\left[\left(\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\partial(u-u_k)}{\partial x_j}\right)^2dxdt\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2dxdt\right)^{1/2}\right]+\left[\left(\int_0^T\int_\Omega(u-u_k)^2dxdt\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^T\int_\Omega v^2dxdt\right)^{1/2}\right]\right)\le$$

$$\le c\sqrt{\varepsilon}(n+1)^2\left(\int_0^T\int_\Omega\left(v^2+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2dxdt\right)\right)^{1/2}=c\sqrt{\varepsilon}(n+1)^2\|v\|,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2.3. Для любого $v\in K$ существует последовательность $v_j\in K\bigcap D$ такая, что $v_j\to v$ и $\lim\limits_{j\to\infty}\left(L\frac{\partial v_j}{\partial t},v_j-v\right)=0$.

Доказательство. Построим последовательность v_j. Обозначим $v_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)v$. Из того, что K – выпуклый конус, содержащий точки 0 и v, следует, что $v_n\in K$. А так как D всюду плотно в K, существует последовательность $u_n\in K\bigcap D$ такая, что $\|u_n-v_n\|<\frac{1}{n}$. И, следовательно, $\|u_n-v\|\le\|u_n-v_n\|+\|v_n-v\|<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\|v\|\underset{n\to\infty}{\to}0$. Пусть $w_n=u_n-v_n$. Тогда $u_n=v_n+w_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)v+w_n\Rightarrow v=\frac{n}{n-1}(u_n-w_n)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(L\frac{\partial u_n}{\partial t},u_n-v\right)=\lim_{n\to\infty}\left(L\frac{\partial u_n}{\partial t},u_n-\frac{n}{n-1}(u_n-w_n)\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n-1}\left(L\frac{\partial u_n}{\partial t},u_n\right)+\frac{n}{n-1}\left(L\frac{\partial u_n}{\partial t},w_n\right)\right)\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n-1}\left\|L\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\|_{U'}\cdot\|u_n\|_U+\frac{n}{n-1}\left\|L\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\|_{U'}\cdot\|w_n\|_U\right).$$

Последовательнсть u_n равномерно ограничена $\left(\|u_n\|_U\le R\right)$, так что $\left\|L\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\|_{U'}\le C\|u_n\|_U\le CR$ и, следовательно,

$$\frac{1}{n-1}\left\|L\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\|_{U'}\cdot\|u_n\|_U\le\frac{1}{n-1}CR^2\underset{n\to\infty}{\to}0 \quad\text{и}\quad \frac{n}{n-1}\left\|L\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\|_{U'}\cdot\|w_n\|_U\le\frac{n}{n-1}CR\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Итак, мы получили последовательность $u_n \to v$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(L\dfrac{\partial u_n}{\partial t}, u_n - v\right) = 0$.

Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. $\left(L\dfrac{I-G(h)}{h}\phi,\phi\right) \geq 0$ для всех $\phi \in U$.

Доказательство. Определим новое скалярное произведение на пространстве U как $(u,v)_L = (Lu,v)$, $\forall u,v \in U$ и соответствующую норму как $\|u\|_L = (u,u)_L$, $\forall u \in U$. Для каждого $\phi \in U$ имеем $\left(L\dfrac{I-G(h)}{h}\phi,\phi\right) = \dfrac{1}{h}\Big((\phi,\phi)_L - (G(h)\phi,\phi)_L\Big) \geq \dfrac{1}{h}\Big(\|\phi\|_L^2 - \|G(h)\|_L\|\phi\|_L^2\Big)$, где $\|G(h)\|_L = \sup\limits_{\|\phi\|\neq 0}\dfrac{\|G(h)\phi\|_L}{\|\phi\|_L}$. Используя представления оператора L (1.3) и полугруппы $G(h)$ (2.1), легко проверить неравенство $\|G(h)\|_L \leq 1$, что и доказывает лемму.

Теперь сформулируем основную теорему данной статьи – теорему о существовании и единственности слабого решения вариационного неравенства.

Теорема 2.1. Задача (1.8) при условиях (1.5), (1.6) имеет решение, причем единственное.

Доказательство. Существование. Обозначим через $G(s)$ линейную полугруппу, для которой $\left(-\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ является генератором, и $\Lambda_h = \dfrac{I-G(h)}{h}, h>0$. Докажем, что $\exists u_h \in K$ такая, что $(L\Lambda_h u_h, v-u_h) + (Mu_h, v-u_h) \geq (f, v-u_h)$ $\forall v \in K$. Обозначим $A_h v = L\Lambda_h v + Mv$ и докажем, что существует решение $u_h \in K$ задачи $(Au_h, v-u_h) \geq (f, v-u_h)$ $\forall v \in K$.

$L\Lambda_h$ – ограниченный, слабо непрерывный, монотонный оператор $\Rightarrow$

$\Rightarrow L\Lambda_h$ – псевдомонотонный M – псевдомонотонный	$\Rightarrow$ A_h – псевдомонотонный оператор [2].

$$\frac{(L\Lambda_h v, v-v_0)}{\|v\|} = \frac{(L\Lambda_h v, v)}{\|v\|} - \frac{(L\Lambda_h v, v_0)}{\|v\|} \geq 0 - \frac{\|L\Lambda_h v\|_{U'}\|v_0\|_U}{\|v\|} \underset{\|v\|\to\infty}{\to} -C,$$

$\dfrac{(A_h v, v-v_0)}{\|v\|} = \dfrac{(L\Lambda_h v, v-v_0)}{\|v\|} + \dfrac{(Mv, v-v_0)}{\|v\|} \underset{\|v\|\to\infty}{\to} +\infty$ (следует из коэрцитивности M), т.е. A_h – псевдомонотонный и коэрцитивный оператор. По основной теореме существования решения эллиптических вариационных неравенств (см. [1], теорема 8.2), задача $(A_h u_h, v-u_h) \geq (f, u_h)$ $\forall v \in K$ имеет решение $u_h \in K$. Остается показать, что их предел есть решение слабой задачи (1.8).

Сначала покажем, что решения u_h ограничены при $h \to 0$. Предположим обратное: существует последовательность $h_k \to 0$ такая, что $\|u_{h_k}\| \underset{k\to\infty}{\to} \infty$.

Тогда $(A_{h_k} u_{h_k}, v-u_{h_k}) \geq (f, v-u_{h_k})\ \forall v \in K \Rightarrow (A_{h_k} u_{h_k}, u_{h_k} - v_0) \leq (f, u_{h_k} - v_0)$. Из коэрцитивности A_{h_k} следует, что $\dfrac{(A_{h_k} u_{h_k}, u_{h_k} - v_0)}{\|u_{h_k}\|} \underset{k\to\infty}{\to} +\infty$. Но

$$\frac{(A_{h_k} u_{h_k}, u_{h_k} - v_0)}{\|u_{h_k}\|} \leq \frac{(f, u_{h_k} - v_0)}{\|u_{h_k}\|} \leq \frac{\|f\| \|u_{h_k} - v_0\|}{\|u_{h_k}\|} \underset{k\to\infty}{\to} \|f\|.$$

Получается противоречие, а значит решения u_h ограничены. Оператор M ограничен, и, следовательно, Mu_h тоже ограничены (в U'). Отсюда вытекает, что из u_h можно выделить такую последовательность (для простоты обозначим через u_k), что и $u_k \underset{k\to\infty}{\to} u$, и $Mu_k \underset{k\to\infty}{\to} \chi$ в слабом смысле.

Имеем:

$$(L\Lambda_k v, v-u_k) + (Mu_k, v-u_k) - (f, v-u_k) =$$
$$\underbrace{(L\Lambda_k(v-u_k), v-u_k)}_{\geq 0} + \underbrace{(L\Lambda_k u_k, v-u_k) + (Mu_k, v-u_k) - (f, v-u_k)}_{\geq 0} \geq 0\ \ \forall v \in K \cap D, \quad (2.2)$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(Mu_k, u_k) \leq \left(L\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right) + (\chi, v) - (f, v-u)\ \ \forall v \in K \cap D,$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(Mu_k, u_k - u) \leq \left(L\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right) + (\chi - f, v-u)\ \ \forall v \in K \cap D.$$

По лемме 2.3 $\exists v_j \in K \cap D$ такая, что $v_j \to u$ и $\lim\limits_{j\to\infty}\left(L\dfrac{\partial v_j}{\partial t}, v_j - u\right) = 0$. Тогда (2.2) справедливо для всех $v \in K \cap D$ $\Rightarrow$ будет справедливо и для всех v_j.

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(Mu_k, u_k - u) \leq \left(L\frac{\partial v_j}{\partial t}, v_j - u\right) + (\chi - f, v_j - u)\ \ \forall j = 1, 2, \ldots \Rightarrow$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(Mu_k, u_k - u) \leq \lim_{j\to\infty}\left(\left(L\frac{\partial v_j}{\partial t}, v_j - u\right) + (\chi - f, v_j - u)\right) = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(Mu_k, u_k - u) \leq 0 \\ M \text{ – псевдомонотонный} \end{array}\right| \Rightarrow \underline{\lim_{k\to\infty}}(Mu_k, u_k - v) \geq (Mu, u-v)\ \ \forall v \in K.$$

Тогда $\forall v \in K \cap D\ \ (Mu, u-v) \leq \underline{\lim\limits_{k\to\infty}}(Mu_k, u_k - v) \leq \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(Mu_k, u_k - v) =$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}}(Mu_k, u_k) - (\chi, v) \leq (L\frac{\partial v}{\partial t}, v-u) - (f, v-u).$$

Отсюда и получается, что u – слабое решение нашей задачи

$$\left(L\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right) + (Mu, v-u) \geq (f, v-u)\ \ \forall v \in K \cap D.$$

Единственность. Допустим, что имеются два решения – u_1 и u_2. Это значит, что

$$\left(L\frac{\partial v}{\partial t}, v-u_1\right)+(Mu_1, v-u_1)\ge(f, v-u_1) \quad \forall v\in K\bigcap D,$$

$$\left(L\frac{\partial v}{\partial t}, v-u_2\right)+(Mu_2, v-u_2)\ge(f, v-u_2) \quad \forall v\in K\bigcap D.$$

Возьмем $w=\dfrac{u_1+u_2}{2}\in K$ и последовательность $w_j \underset{j\to\infty}{\to} w$ из леммы 2.3. В обоих вышеприведенных неравенствах возьмем $v=w_j$ и суммируем их друг с другом:

$$\left(L\frac{\partial w_j}{\partial t}, 2w_j-(u_1+u_2)\right)+(Mu_1, w_j-u_1)+(Mu_2, w_j-u_2)\ge(f, 2w_j-(u_1+u_2))\Rightarrow$$

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}[(Mu_1, u_1-w_j)+(Mu_2, u_2-w_j)]\le 2\,\overline{\lim_{j\to\infty}}\left[\left(L\frac{\partial w_j}{\partial t}, w_j-w\right)-(f, w_j-w)\right]=0\Rightarrow$$

$$(Mu_1, u_1-w)+(Mu_2, u_2-w)\le 0\Rightarrow \left(Mu_1, u_1-\frac{u_1+u_2}{2}\right)+\left(Mu_2, u_2-\frac{u_1+u_2}{2}\right)\le 0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(Mu_1, u_1-u_2)+\frac{1}{2}(Mu_2, u_2-u_1)\le 0\Rightarrow (Mu_1, u_1-u_2)-(Mu_2, u_1-u_2)\le 0\Rightarrow$$

$(Mu_1-Mu_2, u_1-u_2)\le 0\Rightarrow u_1=u_2$ (из строгой монотонности M).

Теорема 2.1 доказана.

Приведем начально-краевую задачу, соответствующую вышеприведенному вариационному неравенству. Пусть $V=W_2^1((0,T),W_2^2(\Omega))$.

$$\begin{cases} \hat{L}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\hat{M}u=f(x,t), \\ u\big|_{t=0}=0, \\ u\big|_{\Sigma}\ge 0, \\ \left.\left(\dfrac{\partial}{\partial \nu_{\hat{L}}}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial \nu_{\hat{M}}}\right)\right|_{\Sigma}\ge 0, \\ \left.u\left(\dfrac{\partial}{\partial \nu_{\hat{L}}}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial \nu_{\hat{M}}}\right)\right|_{\Sigma}=0, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\quad \hat{L}u=-\sum_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)+a_0(x)u, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \nu_{\hat{L}}}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i),$

$$\hat{M}u=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(\nabla u))+cu, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_{\hat{M}}}=\sum_{i=1}^{n}b_i(\nabla u)\cos(\nu, x_i),$$

а $a_{i,j}$, a_0, b_i удовлетворяют условиям (1.5), (1.6). Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. Если решение задачи (1.7) u принадлежит V, то оно является и решением задачи (2.3). Справедливо и обратное: если $u\in V$ решение задачи (2.3), то оно является решением и (1.7). Доказательство теоремы проводится аналогично эллиптическому случаю [4].

Фактически было доказано существование и единственность слабого решения задачи (2.3) при вышеприведенных условиях. Отметим, что при наличии сильного решения начально-краевой задачи, оно также единственное.

Кафедра теории оптимального управления и приближенных методов

Поступила 27.06.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лионс Ж.Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. **Showalter R.E.** Mathematical surveys and monographs. V. 49. 1997.
3. **Киндерлер Д., Стампаккья Г.** Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
4. **Куфнер А., Фучик С.** Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988.
5. **Ptashnyk M.** – Ukrainian Mathematical J., 2002, v. 54, № 1, p. 112–125.
6. **Ptashnyk M.** Nonlinear Pseudoparabolic Equations and Variational Inequalities (dissertation). University of Heidelberg, Faculty of Mathematics and Informatics, 2004.
7. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

Ա. Ա. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ԽՆԴԻՐ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՊՍԵՎԴՈՊԱՐԱԲՈԼԱԿԱՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրված է պսևդոպարաբոլական տիպի վարիացիոն խնդիր: Ապացուցված է թույլ լուծման գոյությունն ու միակությունը: Ապացուցված է համապատասխան սկզբնական պայմաններով եզրային խնդրի լուծելիությունը և ցույց է տրված նրա համարժեքությունը վարիացիոն անհավասարմանը:

A. A. PETROSYAN

VARIATIONAL PROBLEM FOR SOME CLASS OF NONLINEAR PSEUDOPARABOLIC OPERATORS

Summary

In the paper a variational inequality is considered for pseudoparabolic operators. The theorem of existence and uniqueness of weak solution is proved. Also it's proved the solvability of corresponding initial – boundary value problem and is shown it to be equivalent to variational inequality.