ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 517. 55

А. И. ПЕТРОСЯН

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА b_α^2 ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В статье получено параметрическое представление для гильбертова пространства $b_\alpha^2(B)$ функций, гармонических в единичном шаре $B \subset \boldsymbol{R}^n$.

Введение. Пусть $B = \{x \in \boldsymbol{R}^n : |x| < 1\}$ – открытый единичный шар в n-мерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Для заданного $\alpha \in (-1, \infty)$ рассмотрим меру $dV_\alpha(x) = (1 - |x|^2)^\alpha dV(x)$, где $dV(x)$ – элемент объема в $\boldsymbol{R}^n$. Обозначим через $Z_m(\zeta, \eta)$ зональную гармонику порядка m с полюсом η.

В работе [1] введены банаховы пространства $b_\alpha^p(B) = b_\alpha^p$ функций $u(x)$, гармонических в B и имеющих конечную норму

$$\|u\|_{p,\alpha} = \left[\int_B |u(x)|^p dV_\alpha(x) \right]^{1/p} < +\infty, \qquad 0 < 1 \le p < \infty.$$

Далее, для функций $u \in b_\alpha^p(B)$ получено интегральное представление $u(x) = \int_B u(y) R_\alpha(x, y)\, dV_\alpha(y)$, где

$$R_\alpha(x, y) = \frac{2}{nV(B)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n/2 + m + \alpha + 1)}{\Gamma(n/2 + m)\Gamma(\alpha + 1)} Z_m(x, y) \tag{1}$$

– воспроизводящее ядро. С использованием этого ядра в данной работе строится параметрическое представление для гильбертова пространства $b_\alpha^2(B)$.

Предварительные леммы. Пусть $u_r(x) = u(rx)$ – r-растяжение функции $u(x)$. Для $1 \le p \le \infty$ через $h^p(B)$ обозначим гармоническое пространство Харди, т.е. пространство функций $u(x)$, гармонических в B, для которых

$$\| u \|_{h^p} = \sup_{0<r<1} \| u_r \|_p < \infty.$$

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ гармонична в единичном шаре B и $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k(x)$ – ее разложение на однородные гармонические полиномы. В этом случае $f\in h^2(B)$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|p_k\|^2_{L^2(S)}<\infty$.

Доказательство. Для фиксированного $r\in(0,1)$ будем иметь

$$\|f_r\|^2_{L^2(S)}=\int_S |f_r(\zeta)|^2 d\sigma(\zeta)=\int_S\left(\sum_{k=0}^{\infty}p_k(r\zeta)\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\overline{p}_j(r\zeta)\right)d\sigma(\zeta)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\int_S p_k(r\zeta)\overline{p}_j(r\zeta)\,d\sigma(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_S |p_k(r\zeta)|^2 d\sigma(\zeta),$$

где последнее равенство справедливо в силу ортогональности сферических гармоник разных степеней. Перейдя к пределу при $r\to 1$, получим $\|f\|^2_{h^2}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|p_k\|^2_{L^2(S)}$.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть функция $u(x)$ гармонична в B и пусть $u(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_k(x)$ – ее однородное разложение. Для того чтобы функция $u(x)$ принадлежала пространству $b^2_\alpha(B)$, необходимо и достаточно условие

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n/2+k)}{\Gamma(n/2+\alpha+1+k)}\|u_k\|^2_{L^2(S)}<+\infty. \tag{2}$$

Доказательство. Для любого $r\in(0,1)$ имеем

$$\int_{B(r)}|u(y)|^2 dV_\alpha(y)=\int_{B(r)}|u(y)|^2\left(1-|y|^2\right)^\alpha dV(y)=$$

$$=nV(B)\int_0^r\rho^{n-1}\left(1-\rho^2\right)^\alpha d\rho\Big(\sum_{k=0}^{\infty}u_k(\rho\zeta)\sum_{s=0}^{\infty}\overline{u}_s(\rho\zeta)\Big)d\sigma(\zeta)=$$

$$=nV(B)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^r\rho^{n-1+k+s}\left(1-\rho^2\right)^\alpha d\rho\int_S u_k(\zeta)\overline{p}_s(\zeta)\,d\sigma(\zeta)=$$

$$=\frac{nV(B)}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{r^2}t^{\frac{n}{2}-1+k}\left(1-t\right)^\alpha dt\int_S|u_k(\zeta)|^2 d\sigma(\zeta).$$

Учитывая, что

$$\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1+k}(1-t)^\alpha\,dt=\frac{\Gamma(n/2+k)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n/2+\alpha+1+k)},$$

и перейдя к пределу при $r\to 1-0$, получим

$$\|u\|^2_{2,\alpha}=\int_B|u(y)|^2 dV_\alpha(y)=\frac{nV(B)\Gamma(\alpha+1)}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n/2+k)}{\Gamma(n/2+\alpha+1+k)}\|u_k\|^2_{L^2(S)},$$

откуда и следует утверждение леммы.

Ниже приведем некоторые известные сведения из теории гармонических функций, которые можно найти, например, в книге [2]. Пусть $H_m(\boldsymbol{R}^n)$ – множество всех комплексозначных однородных гармонических полиномов степени m в пространстве $\boldsymbol{R}^n$; $H_m(S)$ – множество всех сферических гармоник степени m, т. е. сужений функций из $H_m(\boldsymbol{R}^n)$ на сферу S. Гильбертово пространство $L^2(S)$ разлагается в прямую сумму подпространств $H_m(S)$, т. е. $L^2(S)=\bigoplus_{m=0}^{\infty}H_m(S)$. Это означает следующее:

а) $H_m(S)$ является замкнутым подпространством $L^2(S)$;

б) $H_m(S)$ ортогональна к $H_k(S)$, если $m\neq k$;

в) для каждой функции $u\in L^2(S)$ существуют $u_m\in H_m(S)$ такие, что

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}u_m, \tag{3}$$

где ряд сходится по норме $L^2(S)$.

Лемма 3. Пусть функция $f\in L^2(S)$ и $f=\sum_{m=0}^{\infty}p_m$ – ее разложение на сферические гармоники, аналогичное разложению (3). Тогда для гармонических полиномов $p_m(x)$ справедливы формулы

$$p_m(x)=\int_S f(\zeta)Z_m(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta),\quad m=0,1,... \tag{4}$$

Доказательство. Для всякой фиксированной точки $x=r\eta$ ($r\geq 0,\eta\in S$) имеем

$$p_m(x)=r^m p_m(\eta)=r^m\int_S p_m(\zeta)Z_m(\eta,\zeta)\,d\sigma(\zeta)=r^m\int\left(\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\zeta)\right)Z_m(\eta,\zeta)\,d\sigma(\zeta)=$$

$$=r^m\int_S f(\zeta)Z_m(\eta,\zeta)\,d\sigma(\zeta)=\int_S f(\zeta)Z_m(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta).$$

Здесь третье равенство следует из ортогональности сферических гармоник разных степеней.

Изоморфизм между h_α^2 и h^2.

Теорема 1. Пусть $u\in b_\alpha^2(B)$ и $f(x)=\int_0^1 u(tx)t^{\frac{n}{2}-1}(1-t)^{\frac{\alpha-1}{2}}\,dt.$ Тогда $f\in h^2(B)$ и $u(x)=\dfrac{nV(B)}{2}\int_S f(\zeta)R_{\frac{\alpha-1}{2}}(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta).$

Доказательство. Пусть $u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)$ – соответствующее однородное разложение. Тогда

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1+k}(1-t)^{\frac{\alpha-1}{2}}\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n/2+k)\Gamma(\alpha/2+1/2)}{\Gamma(n/2+\alpha/2+1/2+k)}u_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(x),$$

где

$$p_k(x) = \frac{\Gamma(n/2+k)\Gamma(\alpha/2+1/2)}{\Gamma(n/2+\alpha/2+1/2+k)} u_k(x). \tag{5}$$

Из формулы Стирлинга следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma(n/2+k)}{\Gamma(n/2+\alpha+1+k)} \cdot \frac{\Gamma^2(n/2+\alpha/2+1/2+k)}{\Gamma^2(n/2+k)} = 1. \tag{6}$$

Учитывая сходимость ряда (2), а также равенство (6), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|p_k\|^2_{L^2(S)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n/2+k)\Gamma^2(\alpha/2+1/2)}{\Gamma^2(n/2+\alpha/2+1/2+k)} \|u_k\|^2_{L^2(S)} < +\infty.$$

Отсюда, согласно лемме 1, следует, что $f \in h^2(B)$. Далее, используя (4), (5) и (1), будем иметь

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n/2+\alpha/2+1/2+k)}{\Gamma(n/2+k)\Gamma(\alpha/2+1/2)} p_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n/2+\alpha/2+1/2+k)}{\Gamma(n/2+k)\Gamma(\alpha/2+1/2)} \int_S f(\zeta) Z_k(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) =$$

$$= \int_S f(\zeta) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n/2+\alpha/2+1/2+k)}{\Gamma(n/2+k)\Gamma(\alpha/2+1/2)} Z_k(x,\zeta) \right] d\sigma(\zeta) = \frac{nV(B)}{2} \int_S f(\zeta) R_{\frac{\alpha-1}{2}}(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Оператор $T_\alpha[f](x) = \dfrac{nV(B)}{2} \displaystyle\int_S f(\zeta) R_{\frac{\alpha-1}{2}}(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta)$ отображает $L^2(S)$ на $b^2_\alpha(B)$ взаимно однозначно, иными словами, формула $u(x) = T_\alpha[f](x)$ дает параметрическое представление пространства $b^2_\alpha(B)$.

Доказательство. Пусть f – произвольная функция из $L^2(S)$ и $f = \sum p_k$ – ее однородное разложение (т.е. $p_k \in H_k(S)$). Тогда функция

$$P[f](x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)$$

принадлежит $h^2(B)$, где $P[f]$ обозначает интеграл Пуассона функции f. Из (6) и лемм 1 и 2 следует, что

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n/2+\alpha/2+1/2+k)}{\Gamma(n/2+k)\Gamma(\alpha/2+1/2)} p_k(x)$$

принадлежит $b^2_\alpha(B)$. Применяя лемму 3, как и выше, получим

$$u(x) = \frac{nV(B)}{2} \int_S f(\zeta) R_{\frac{\alpha-1}{2}}(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta)\ ,$$

т.е. $u(x) = T_\alpha[f](x)$.

Теорема доказана.

Отметим, что параметрическое представление для весовых классов функций, голоморфных в единичном круге, впервые было дано

М.М. Джрбашяном в [3].

Кафедра теории функций *Поступила 03.07.2007*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петросян А.И.** – Ученые записки ЕГУ, 2006, № 1, с. 17–22.
2. **Axler Sh., Bourdon P., Ramey W.** Harmonic function theory. New York: Springer-Verlag, Inc., 2001.
3. **Джрбашян М.М.** – Сообщ. Института матем. и мех. АН Армянской ССР, 1948, т. 2, с. 3–40.

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՀԱՐՄՈՆԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ b_α^2 ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում ստացված է $B \subset \boldsymbol{R}^n$ միավոր գնդում հարմոնիկ ֆունկցիաների $b_\alpha^2(B)$ հիլբերտյան տարածությունների համար պարամետրական ներկայացում:

A. I. PETROSYAN

THE PARAMETRIC REPRESENTATION OF THE SPACE b_α^2 OF HARMONIC FUNCTIONS

Summary

In the paper the parametric representation for Hilbert spaces $b_\alpha^2(B)$ of functions harmonic in the unit ball $B \subset \boldsymbol{R}^n$ is obtained.