ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 517.9

А. О. ОГАНЕСЯН, С. Г. РАФАЕЛЯН

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С помощью преобразования Меллина строится решение задачи Коши для одного типа вырождающегося параболического уравнения.

Рассмотрим задачу Коши для вырождающегося параболического уравнения

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i u_{x_i} + bu = 0,$$
$$-\infty < t < \infty, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где коэффициенты a_i $(i = 1, \dots, n)$ и b – постоянные.

Заменой переменных $y_i = \ln x_i$ при $x_i > 0$ и $y_k = \ln(-x_k)$ при $x_k < 0$, $i, k = 1, \dots, n$, эту задачу можно свести к задаче с постоянными коэффициентами и решить с помощью преобразования Фурье. При этом, так как замена переменных не определена на координатных плоскостях $x_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, задачу (1) надо решать отдельно в каждом «квадранте», а потом склеивать решения. В настоящей работе предлагается решение задачи (1) с помощью многомерного преобразования Меллина [1, 2], которое по существу включает в себя как вышеприведенную замену переменных, так и преобразование Фурье.

Преобразование Меллина применяется, например, при построении фундаментального решения вырождающегося эллиптического уравнения фуксовского типа [1]. Вид полученного решения может быть использован для построения параметрикса задачи (1) в случае, когда коэффициенты a_i $(i = 1, \dots, n-1)$ и b являются функциями независимых переменных.

Определение. Пусть функция f такая, что $x^{\gamma-1} f \in L^1(R_+^n)$, где $x^{\gamma-1} = x_1^{\gamma_1 - 1} x_2^{\gamma_2 - 1} \cdots x_n^{\gamma_n - 1}$. Тогда прямое и обратное преобразования Меллина соответственно определяются по формулам

$$M\left[f(x)\right](s) = M(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx, \tag{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}M(s)x^{-s}ds\,, \tag{3}$$

где $dx=dx_1dx_2\cdots dx_n$, $ds=ds_1ds_2\cdots ds_n$, $s_j=\gamma_j+i\sigma_j$ $j=1,...,n$, а символ $\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}$

означает $\int\limits_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\cdots\int\limits_{\gamma_n-i\infty}^{\gamma_n+i\infty}$.

Нетрудно видеть, что если $x^{\gamma-k-l}D^{\beta}f\in L^1(R_+^n)$, то

$$M\left[x^{\alpha}D^{\alpha}f\right](s)=(s-1+\alpha)_{\alpha}M\left[f\right](s)\,, \tag{4}$$

где $(a)_{\alpha}=(a_1)_{\alpha_1}\cdots(a_n)_{\alpha_n}$, а $(a_k)_{\alpha_k}=a_k(a_k-1)\cdots(a_k-\alpha_k)$, $(a_k)_0=1$, $0\le\alpha_k\le\beta_k$, $0\le l_k\le\alpha_k$, $k=1,...,n$. Кроме того, покажем, что для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ таких, что $x^{\gamma-1}\varphi\in L^1(R_+^n)$ и $x^{q-\gamma-1}\psi(x)\in L^1(R_+^n)$, имеет место формула типа свертки для преобразования Меллина:

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Phi(s)\Psi(q-s)y^{-s}ds=\int\limits_0^{\infty}\varphi(xy)\psi(x)x^{q-1}dx\,, \tag{5}$$

где $\Phi(s)=M\left[\varphi\right](s)$, $M(s)=M[\psi](s)$. Действительно, учитывая формулы (2), (3), получаем

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Phi(s)\Psi(q-s)y^{-s}ds=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Phi(s)ds\int\limits_0^{\infty}\psi(x)x^{(q-s)-1}y^{-s}dx=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Phi(s)(xy)^{-s}ds\psi(x)x^{q-1}dx=\int\limits_0^{\infty}\varphi(xy)\psi(x)x^{q-1}dx\,.$$

Применим преобразование Меллина по переменным $x_1,\dots,x_n$ $(x_k>0,$ $k=1,...,n)$ к задаче (1), предположив, что для функций $u(x,t)$ и $\varphi(x)$ оно существует.

Принимая во внимание формулу (4), приходим к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$M_t\left[u(x,t)\right](s)=\left(\sum_{j=1}^{n}s_j(s_j+1)-\sum_{j=1}^{n}a_js_j-b\right)M\left[u(x,t)\right](s)\,,$$

$$M\left[u(x,t)\right](s)\big|_{t=0}=M\left[\varphi(x)\right](s)\,.$$

Обозначив $M\left[u(x,t)\right](s)=M(s,t)$, $M\left[\varphi(x)\right](s)=M_0(s)$, запишем полученную задачу в виде

$$\begin{gathered}M_t=\left[\sum_{j=1}^{n}\left(s_j-p_j\right)^2+q_j\right]M,\\ M\,|_{t=0}=M_0(s),\end{gathered} \tag{6}$$

где $p_j=\dfrac{a_j-1}{2}$, $q_j=-b-\left(\dfrac{a_j-1}{2}\right)^2$, $j=1,...,n$.

Решение задачи (6) имеет вид $M(s,t)=M_0(s)e^{qt}e^{\sum\limits_{j=1}^{n}(s_j-p_j)^2 t}$, где $q=\sum\limits_{j=1}^{n}q_j$. Отсюда, используя формулу обращения преобразования Меллина (3) и (5), имеем

$$u(x,t)=\frac{e^{qt}}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}M_0(s)\prod_{j=1}^{n}e^{(s_j-p_j)^2 t}x^{-s}ds=e^{qt}\int\limits_0^{\infty}\varphi(\tau x)\psi(\tau)\tau^{p-1}d\tau\,, \qquad (7)$$

где $\psi(\tau)=\prod\limits_{j=1}^{n}M^{-1}\left[e^{s_j^2 t}\right]$.

Найдем один из сомножителей в последнем выражении:

$$M^{-1}\left[e^{s_j^2 t}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j-i\infty}^{\gamma_j+i\infty}e^{ts_j^2}x_j^{-s_j}ds_j=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{t(\gamma_j+i\tau_j)^2}x_j^{-\gamma_j-i\tau_j}id\tau_j=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{t\gamma_j^2}e^{-\gamma_j y_j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{(2\gamma_j\tau_j t-\tau y_j)i}e^{-t\tau_j^2}d\tau_j=\frac{1}{2\pi}e^{t\gamma_j^2}e^{-\gamma_j y_j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\tau_j(y_j-2\gamma_j t)}e^{-t\tau_j^2}d\tau_j\,.$$

Здесь была использована замена переменных $x_j=e^{y_j}$. Пользуясь известной формулой $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda\tau}e^{-t\tau^2}d\tau=e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$, получаем

$$M^{-1}\left[e^{s_j^2 t}\right]=\frac{1}{2\pi}e^{t\gamma_j^2}e^{-\gamma_j y_j}e^{-\frac{(y_j-2\gamma_j t)^2}{4t}}\sqrt{\frac{\pi}{t}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\ln^2 x_j}{4t}}\,.$$

Поэтому выражение для $\psi(x)$ имеет вид $\psi(x)=\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\prod\limits_{j=1}^{n}e^{-\frac{\ln^2 x_j}{4t}}$. Подставляя его в формулу (7), получим

$$u(x,t)=\frac{e^{qt}}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_0^{\infty}\varphi(\tau x)\prod_{j=1}^{n}e^{-\frac{\ln^2\tau_j}{4t}}\tau^{p-1}d\tau,\quad 0<t<T,\ x\in R_+^n. \qquad (8)$$

После замены переменных $\tau_k x_k=y_k$ $(k=1,...,n)$ (8) принимает вид

$$u(x,t)=\frac{x^{-p}e^{qt}}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_0^{\infty}\varphi(y)\prod_{j=1}^{n}e^{-\frac{\ln^2(y_j/x_j)}{4t}}y^{p-1}dy,\quad 0<t<T,\ x\in R_+^n. \qquad (9)$$

При выводе формул (8) и (9) предполагалось, что начальная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет определенным условиям, а именно, для нее существуют прямое и обратное преобразования Меллина. Непосредственные вычисления показывают, что функция $u(x,t)$, определяемая по формулам (8), (9), удовлетворяет (1) при $0<t<\infty$, $x\in R_+^n$, если только предположить, что $\varphi(x)\in L^1(R_+^n)$ и непрерывна.

Теперь рассмотрим задачу (1) в других «квадрантах». Пусть, например, $x\in R_-^n$, т.е. $x=(x_1,...,x_n)$, $x_k<0$, $k=1,...,n$. В этом случае функция $u(x,t)$, определяемая по формуле (8), тоже является решением задачи (1).

Полученные в разных «квадрантах» решения склеиваются в точке $x=0$, так как из (8) следует, что пределы $u(x,t)$ со стороны R_+^n и R_-^n равны:

$$\lim_{x\to+0} u(x,t) = \lim_{x\to-0} u(x,t) = \varphi(0)e^{qt}.$$

Формула (9) для R_-^n после замены переменной $\tau_k x_k = y_k$ $(k=1,...,n)$ имеет вид

$$u(x,t) = \frac{x^{-p}e^{qt}}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int_0^{-\infty}\varphi(y)\prod_{j=1}^n e^{-\frac{\ln^2(y_j/x_j)}{4t}} y^{p-1}dy, \quad t\in(0,\infty),\ x\in R_-^n. \quad (10)$$

Рассмотрим поведение частных производных по x. Из формулы (9) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{-p_k x^{-p}e^{qt}}{x_k(2\sqrt{\pi t})^n}\int_0^{\infty}\varphi(y)\prod_{j=1}^n e^{-\frac{\ln^2(y_j/x_j)}{4t}} y^{p-1}dy +$$

$$+\frac{x^{-p}e^{qt}}{x_k(2\sqrt{\pi t})^n}\int_0^{\infty}\varphi(y)\prod_{j=1}^n e^{-\frac{\ln^2(y_j/x_j)}{4t}} \frac{1}{2t}\ln\left(\frac{y_j}{x_j}\right) y^{p-1}dy.$$

Умножив обе части на x_k и сделав замену переменных $y_j = \tau_j x_j$ $(j=1,...,n)$, получим

$$x_k\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{e^{qt}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\left[\int_0^{\infty}(-p_k)\varphi(\tau x)\prod_{j=1}^n e^{-\frac{\ln^2\tau_j}{4t}}\tau^{p-1}d\tau + \int_0^{\infty}\varphi(\tau x)\frac{1}{2t}\ln\tau_k\prod_{j=1}^n e^{-\frac{\ln^2\tau_j}{4t}}\tau^{p-1}d\tau\right].$$

Подобным образом показывается существование выражения $\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u$ для любого k.

При условии ограниченности функции $\varphi(x)$ сходимость полученных интегралов проверяется непосредственно. Точно такое же выражение получается со стороны R_-^n. Аналогично строится решение в остальных «квадрантах» и показывается, что как функции $u(x,t)$, построенные в разных «квадрантах», так и их производные по t любого порядка и выражения $\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u$ для любого k склеиваются при $x=0$.

Теперь покажем, что если $\varphi(x)$ ограниченная функция и $b\ge 0$, то ограниченным является и решение $u(x,t)$. Действительно, из формулы (8) имеем

$$|u(x,t)| \le M\frac{e^{qt}}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int_0^{\infty}\prod_{j=1}^n e^{-\frac{\ln^2\tau_j}{4t}}\tau^{p-1}d\tau = M\frac{e^{qt}}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^n e^{-z_j^2}e^{2\sqrt{t}z_j(p_j-1)}e^{2\sqrt{t}z_j}(2\sqrt{t})^n dz =$$

$$= M\frac{e^{qt}}{\pi^{n/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^n e^{-\left(z_j-\sqrt{t}p_j\right)^2+tp_j^2}dz = Me^{-bn}.$$

Обозначим через $\tilde{C}^l(R^n)$ множество функций $g(x)$, $x\in R^n$, таких, что $\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^k g\in C(R^n)$, $|k|=0,...,l$, и $\tilde{C}^\infty(R^n) = \bigcap_{l=0}^{\infty}\tilde{C}^l(R^n)$, а через $C^\infty((0,\infty),\tilde{C}^\infty(R^n))$

– множество бесконечно дифференцируемых по t функций $r(x,t)$, которые по переменным $x=(x_1,...,x_n)$ принадлежат $\tilde{C}^\infty(R^n)$.

Используя эти обозначения, доказанные выше факты можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна, ограничена и интегрируема в R^n и $b \geq 0$. Тогда существует ограниченное решение задачи (1) $u \in C^\infty\left((0,\infty),\tilde{C}^\infty(R^n)\right)$, которое, например, в R_+^n имеет вид (8).

Кафедра высшей математики,
кафедра теории функций

Поступила 20.09.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Szmydt Z., Ziemian B.** The Mellin Transformation and Fuchsian Type Partial Differential Equations. Kluwer Academic Publishers, 1992.
2. **Джрбашян М.М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.

Ա. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Ս. Գ. ՌԱՖԱՅԵԼՅԱՆ

ԿՈՇԻԻ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՄԵԿ ՄՈԴԵԼԱՅԻՆ ՎԵՐԱՍԵՐՎՈՂ ՊԱՐԱԲՈԼԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Մելինի ձևափոխության միջոցով կառուցվում է Կոշիի խնդրի լուծումը մեկ տեսքի վերասերվող պարաբոլական հավասարման համար:

A. H. HOVHANNISYAN, S. G. RAFAYELYAN

SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A DEGENERATE PARABOLIC EQUATION

Summary

Using the Mellin transformation the solution of the Cauchy problem for one type degenerate a parabolic equation is constructed.