ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 517.5

М. А. ЗАКАРЯН, А. В. ЦУЦУЛЯН

КРИТЕРИЙ ФРЕДГОЛЬМА И ИНДЕКС ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТЕОПЛИЦА НА НЕКОТОРЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Работа посвящена критерию фредгольмовости операторов Теоплица. Вычисляется индекс этих операторов в гильбертовом пространстве $A^{2,\alpha}(\bar{D})$.

Введение. Для изложения основной проблемы приведем некоторые определения и предварительные сведения.

Пусть $\boldsymbol{T}$ – окружность, D – круг на комплексной плоскости C, $\mu(z)$ – нормированная плоская мера, а $L^{2,\alpha}(\bar{D})$ – класс всех измеримых по Лебегу функций на $\bar{D}$, для которых

$$\|f\|_{L^{2,\alpha}(\bar{D})}=\left(\int_{\bar{D}}\left(1-|z|^2\right)^{\alpha}\left|f(z)\right|^2 d\mu(z)\right)^{1/2}<\infty . \tag{1}$$

Пусть $A^{2,\alpha}(\bar{D})$ – класс всех аналитических функций из $L^{2,\alpha}(\bar{D})$ ($A^{2,\alpha}(\bar{D})$ известно как пространство Джрбашяна или весовое пространство Бергмана, что более принято в европейской литературе). Ясно, что $A^{2,\alpha}(\bar{D})$ замкнуто в $L^{2,\alpha}(\bar{D})$ и, следовательно, $A^{2,\alpha}(\bar{D})$ есть гильбертово пространство [1].

Пусть $L^{\infty,\alpha}(\bar{D})$ – пространство всех измеримых функций на $\bar{D}$ таких, что

$$\|f\|_{L^{\infty,\alpha}(\bar{D})}:=\operatorname{ess}\sup_{z\in\bar{D}}\left(1-|z|^2\right)^{\alpha}|f(z)|<\infty . \tag{2}$$

Далее, через $L_N^{2,\alpha}(\bar{D})$ и $A_N^{2,\alpha}(\bar{D})$ обозначим пространства вектор-столбцов длиной N, координаты которых соответственно из $L^{2,\alpha}(\bar{D})$ и $A^{2,\alpha}(\bar{D})$.

Пусть $L_{N\times N}^{\infty,\alpha}(\bar{D})$ – пространство всех матриц размерности $N\times N$, элементы которых из $L^{\infty,\alpha}(\bar{D})$.

Определение 1. Пусть $a \in L^{\infty,\alpha}_{N\times N}(\bar{D})$. Тогда M_a на $L^{2,\alpha}_N(\bar{D})$ с символом a называется мультипликативным оператором:

$$M_a : L^{2,\alpha}_N(\bar{D})^T \to L^{2,\alpha}_N(\bar{D}); \quad f \mapsto fa .$$

Далее, пусть P – ортогональный проектор из $L^{2,\alpha}(\bar{D})$ на $A^{2,\alpha}(\bar{D})$.

Определение 2. Пусть $a \in L^{\infty,\alpha}_{N\times N}(\bar{D})$. Тогда оператором Теоплица с символом a (T_a) называется

$$T_a : A^{2,\alpha}_N(\bar{D})^T \to A^{2,\alpha}_N(\bar{D}); \quad f \mapsto T_a(f) = P(af) = PM_a f, \quad f \in A^{2,\alpha}_N(\bar{D}).$$

Определение 3. Пусть H – гильбертово пространство. Ограниченный линейный оператор $F \in L(H)$ называется оператором Фредгольма, если его ядро и коядро есть конечномерные пространства. Число $\operatorname{ind} F := \dim \operatorname{Ker} F - \dim \operatorname{CoKer} F$ называется индексом оператора F.

Спектр ограниченного на гильбертовом пространстве линейного оператора F определяется так: $\sigma(F) = \{\lambda \in C \mid F - \lambda I$ не имеет обратного $\}$.

Существенный спектр оператора F – это $\sigma_{ess}(F) = \{\lambda \in C \mid F - \lambda I$ не î ï åðàòî ð Ôðåäãîëüì à $\}$.

О классических результатах для операторов Теоплица и Фредгольма можно найти информацию в [2, 3].

Определение 4. Множество всех комплексных чисел $\lambda \in C$, для которых $\{z \in \bar{D} \| a(z) - \lambda | < \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ имеет положительную меру, называется существенной областью значений a и обозначается через $R(a)$.

Следует заметить, что $R(a)$ есть спектр a, рассматриваемый как один элемент C^*-алгебры $L^{\infty,\alpha}(\bar{D})$.

В N-мерном случае $R(a)$ определяется соответственно как множество всех матриц $b \in C_{N\times N}(\bar{D})$, для которых множество $\{z \in \bar{D} : \|a(z) - b\| < \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ имеет положительную меру $(\|\bullet\|$ понимается как матрица норм в $C_{N\times N}(\bar{D}))$.

Нам понадобится еще метод локализации в C^*-алгебре, который можно найти в [4].

Теорема 1. Пусть U – C^*-алгебра и A – абелева C^*-подалгебра, которая лежит в центре U и имеет максимальный идеал M_A. Для всех x из M_A пусть τ_x – закрытый идеал в U, рожденный элементом a, $\{a \in A | \hat{a}(x) = 0\}$. Тогда имеет место $\bigcap\limits_{x\in M_a} \tau_x = \{0\}$. В частности:

1. Если Φ_x – канонический эпиморфизм из U в U/τ_x для всех x из M_A, тогда $\bigoplus\limits_{x\in M_A} \Phi_x$ – мономорфизм из U в $\bigoplus\limits_{x\in M_A} U/\tau_x$.

2. Оператор F обратимый в U тогда и только тогда, когда $\Phi_x(F)$ обратимый в U/τ_x для всех x из M_A.

Исходя из теоремы 1, для нашего случая получаем следующие локализации к точкам $\boldsymbol{T}$.

Пусть $U := I(L^{\infty,\alpha}_{N\times N}(\bar{D}))\big/K(A^{2,\alpha}_N(\bar{D}))$, где через $K(A^{2,\alpha}_N(\bar{D}))$ обозначен идеал компактных операторов в $L(A^{2,\alpha}_N(\bar{D}))$. $A := I\left(C\left(\bar{D}\right)\cdot I_N\Big/K\left(A^{2,\alpha}_N\left(\bar{D}\right)\right)\right)$, где I_N есть $N\times N$ -мерная единичная матрица и $C(\bar{D})\cdot I_N$ – множество всех диагональных матриц, элементы которых из $C(\bar{D})$. Множество A находится в центре U , и преобразование, приводящее к $A\to C(\boldsymbol{T})$; $T_a + K \mapsto a\big|_{\boldsymbol{T}}$ (K – компакт), есть алгебра изоморфизмов.

Для $t\in\boldsymbol{T}$ обозначим через τ_t закрытый идеал в U : $\left\{T_a\in U \middle| a\in C(\bar{D})\cdot I_N,\ a(t)=0\right\}$. Пусть $U_t = U/\tau_t$ и $\psi_t : I(L^{\infty,\alpha}_{N\times N}(\bar{D}))\to U_t$ – естественный гомеоморфизм. Тогда T_a только тогда будет фредгольмовым, если для всех t из $\boldsymbol{T}$ $\psi_t(T_a)$ в U_t имеет обратный или обратимый оператор.

Определение 5. Пусть A – единичная нормированная алгебра на C и a – элемент из A. Тогда $V(A,a)=\left\{f(a)\middle| f\right.$ из A' (A' – двойное пространство A) такой, что $\left.f(1_A)=1=\|f\|\right\}$ и t называется значением нумерикала a из A, которое имеет следующие свойства.

Для $a,b\in A$ и $\alpha,\beta\in C$ имеют место утверждения:

1. $V(A,a+b)\subset V(A,a)+V(A,b)$.
2. $V(A,\alpha+\beta a)=\alpha+\beta V(A,a)$.
3. $V(A,a)$ – компакт и выпуклый.
4. Если A – единичная нормированная алгебра из C и B – подалгебра из A, имеющая единичный элемент, тогда для всех b из B имеет место равенство $V(B,b)=V(A,b)$.
5. Пусть A – единичная банахова алгебра. Тогда для любого a из A $\sigma(A)\subset V(A,a)$.

Доказательство этих утверждений можно найти в [5], а доказательство следующей леммы – в [1].

Лемма 1. Пусть A, B – единичные банаховы алгебры, a – элемент из A и пусть $\varphi : LH\left\{1_A, a\right\}\to B$ – линейное преобразование, $\|\varphi\|=1$, $\varphi(1_A)=1_B$, где LH – линейное многообразие. Тогда $V(B,\varphi(a))\subset V(A,a)$.

Определение 6. Пусть T – ограниченный линейный оператор на гильбертовом пространстве H . Тогда $W(T)=\{<Tx,x> \mid x\in H, \|x\|=1\}$ называется значением нумерикала T .

В гильбертовом пространстве имеют место утверждения:

6. $W(T)$ – выпуклый.
7. $\sigma(T)\subset\overline{W(T)}$.
8. Если T – нормальный оператор, то $\overline{W(T)}=\mathrm{conv}(\sigma(T))$.

9. $\overline{W(T)} = V(L(H), T)$.

Доказательство этих утверждений можно найти в [5].

Критерий Фредгольма и вычисление индекса для операторов Теоплица. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2. Пусть K – компактное множество из C и U – открытое множество из K. Для $a \in L^{\infty,\alpha}_{N\times N}(U)$ и $b \in R(a)$ имеет место включение $\overline{W(b)} \subset \overline{W(a)}$.

Доказательство. Пусть $y \in \overline{W(b)}$. Тогда для всех $\delta > 0$ существует единственный $x \in C_N$ такой, что $\|x\| = 1$ и $|< bx, x > -y| = |< (b-y)x, x >| < \delta$. Так как $b \in R(a)$, то множество $\{t \in U : \|a(t) - b\| < \varepsilon\}$ имеет положительную меру. Множество всех матриц c, которое удовлетворяет условию $|< (c-y)x, x >| < \delta$, является открытой окрестностью для b, поэтому и множество $A := \{t \in U \| < (a(t)-y)x, x >| < \delta\}$ имеет положительную меру. Мы определяем f из $L^{2,\alpha}_N(U)$ следующим образом: $f(t) := \frac{\chi_A(t)}{\sqrt{\lambda(A)}} x$, $t \in U$. Заметим, что $\|f\| = 1$. Следовательно,

$$\left| < (a-y)f, f >_{L^{2,\alpha}_N(U)} \right| = \left| \int_U < (a(t)-y)f(t), f(t) > d\lambda(t) \right| =$$

$$= \left| \int_A < (a(t)-y)x, x > \frac{1}{\lambda(A)} d\lambda(t) \right| < \sup_{t\in A} |< (a(t)-y)x, x >| < \delta .$$

А это значит, что $y \in \overline{W(a)}$.

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть $a \in L^{\infty,\alpha}_{N\times N}(\bar{D})$ такой, что для всех t из $\boldsymbol{T}$ существуют обратные матрицы $H_t, G_t \in C_{N\times N}$ такие, что $0 \notin \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{W(H_t a G_t |_{U_\varepsilon(t)})}$. Тогда:

1. T_a есть оператор Фредгольма.

2. Существует непрерывная функция $b \in C_{N\times N}(\bar{D})$ такая, что $\operatorname{Ind} T_a = -\operatorname{Ind} \det b$.

Доказательство 1. Пусть $c \in C(\bar{D}) \cdot I_N$ – непрерывная функция на $\bar{D}$. Мы определим ее элементы c_{ii}, $i = 1, 2, ..., N$, следующим образом: $c_{ii} = 1$ на $U_\varepsilon(t)$ и $c_{ii} = 0$ на $\bar{D} \setminus U_\varepsilon(t)$. Определим линейное преобразование: $\psi^c_t : L^\infty_{N\times N}(U_\varepsilon(t)) \to U_t$; $d \mapsto \psi^1_t(T_{cd})$. Так как

$$\psi^c_t(1) = \psi_t(T_c) = \psi_t(T_{1-(1-c)\cdot 1}) = \psi_t(T_1) - \psi_t(T_{(1-c)\cdot 1}) = 1,$$

то

$$\|\psi^c_t(d)\| = \|\psi_t(T_{cd})\| \le \|T_{cd}\| = \|cd\| = \|d\| \Rightarrow \|\psi^c_t\| = 1.$$

Из леммы [1] следует, что $V(U,\psi_t^c(d))\subset V(L^{\infty,\alpha}_{N\times N}(U_\varepsilon(t),d))$, а из свойств значений нумерикала следует, что $\sigma(\psi_t^c(d))\subset V(U_t,\psi_t^c(d))$. Между $L^{\infty,\alpha}_{N\times N}(U_\varepsilon(t))$ и $L(L_N^{2,\alpha}(U_\varepsilon(t)))$ есть изоморфизм, который можно задавать через $d\mapsto M_d$. Снова из свойств значений нумерикала следует, что $V(L^{\infty,\alpha}_{N\times N}(U_\varepsilon(t)))=V(L(L_N^{2,\alpha}(U_\varepsilon(t))),M_d)$. Из свойства 9 следует, что $V(L^{\infty,\alpha}_{N\times N}(U_\varepsilon(t)))=\overline{W(d)}$. Так как $0\notin\bigcap\limits_{\varepsilon>0}\overline{W(H_taG_t\big|_{U_\varepsilon(t)})}$, то существует $\varepsilon>0$ такое, что $0\notin\overline{W(H_taG_t\big|_{U_\varepsilon(t)})}$ и, следовательно, $0\notin\psi_t^c(H_taG_t\big|_{U_\varepsilon(t)})$. Это значит, что существует $\varepsilon>0$ такое, что $\psi_t^c(H_taG_t\big|_{U_\varepsilon(t)})=\psi_t\left(T_{cH_taG_t\big|_{U_\varepsilon(t)}}\right)$ имеет обратный оператор. Тогда

$$a=H_t^{-1}H_ta=H_t^{-1}((1-c)+c\chi_{U_\varepsilon(t)}+c\chi_{T\setminus U_\varepsilon(t)})H_ta,$$

$$\psi_t(T_a)=\psi_t(T_{H_t^{-1}(1-c)H_ta})+\psi_t(T_{H_t^{-1}c\chi_{U_\varepsilon(t)}H_ta}).$$

Так как $T_{1-c}\in\tau_t$, то $T_{H_t^{-1}(1-c)H_ta}=0$, тогда

$$H_t^{-1}\psi_t^c\left(H_taG_t\big|_{U_\varepsilon(t)}\right)G_t^{-1}=\psi_t\left(T_{H_t^{-1}cH_ta\big|_{U_\varepsilon(t)}G_tG_t^{-1}}\right)=\psi_t(T_a)$$

и имеет обратный оператор для всех $t\in\boldsymbol{T}$, поэтому T_a есть оператор Фредгольма.

Доказательство 2. Покрываем $\boldsymbol{T}$ с $U_i:=U_{\varepsilon_i}(t_i)$, для которых имеет место равенство $\boldsymbol{T}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(U_i\cap\boldsymbol{T})$, $U_i\cap U_{i+1}\neq\varnothing$, $i=1,2,...,n$, $t_{n+1}=t_1$. Для краткости обозначим H_{t_i}, G_{t_i} соответственно через H_i, G_i. $s_{i+1}\in U_i\cap U_{i+1}\cap\boldsymbol{T}$, $s_{n+1}:=s_1\in U_n\cap U_1\cap\boldsymbol{T}$. Рассмотрим множество

$$V_i:=\left\{t\in U_i\,\middle|\arg t\in[\arg s_i,\arg s_{i+1}]\right\}.$$

Утверждение. Существует непрерывная функция $b\in C_{N\times N}(\bar{D})$ такая, что $\overline{W(H_ibG_i\big|_{V_i})}\subset\overline{W(H_iaG_i\big|_{U_i})}$.

Для доказательства рассмотрим следующую ломаную ψ на $\boldsymbol{T}$, для которой $\psi(s_{i+1}):=\psi_{i+1}$, $\psi_{i+1}\in R(a\big|_{U_i\cap U_{i+1}})$ и $\psi(t)=(1-\mu_i(t))\psi_i+\mu_i(t)\psi_{i+1}$ для всех t из $V_i\cap\boldsymbol{T}$, где $\mu_i:V_i\cap\boldsymbol{T}\to[0,1]$, $t\mapsto\dfrac{\arg s_i-\arg t}{\arg s_i-\arg s_{i+1}}$.

Из леммы 2 следует, что $\overline{W(H_i\psi_{i+1}G_i)}\subset\overline{W(H_iaG_i\big|_{U_i})}$ и $\overline{W(H_{i+1}\psi_{i+1}G_{i+1})}\subset\overline{W(H_{i+1}aG_{i+1}\big|_{U_{i+1}})}$.

Пусть φ – непрерывная функция и определена так: $\varphi\equiv1$ в окрестности 1 и $\varphi\equiv0$ в окрестности $1/2$. Теперь определим $b\in C_{N\times N}(\bar{D})$ так, что для

$z = rt,\ t \in \boldsymbol{T}$, имеет место $b(z) = \begin{cases} \psi(t)\varphi(r), & r \ge 1/2 \\ 0, & r < 1/2 \end{cases}$.

Для $f \in L_N^{2,\alpha}(V_i)$ с $\|f\| = 1$ следует, что

$$< H_i b G_i f, f > = \int_{V_i} < H_i b(z) G_i f(z), f(z) > d\mu(z) =$$

$$= \int_{V_i} < H_i \psi(t)\varphi(r) G_i f(z), f(z) > d\mu(z) =$$

$$= \int_{V_i} < H_i((1-\mu_i(z)\psi_i + \mu_i(z))\psi_{i+1}) G_i \frac{f(z)}{\|f(z)\|}, \ \frac{f(z)}{\|f(z)\|} > \|f(z)\|^2 d\mu(z).$$

Скалярное произведение подынтегрального выражения лежит в $\overline{W(H_i a G_i|_{U_i})}$. Так как $\overline{W(H_i a G_i|_{U_i})}$ – выпуклый и $\|f(z)\|^2 d\mu(z)$ есть мера вероятности, то $< H_i b G_i f, f >_{L_N^{2,\alpha}(V_i)} \in \overline{W(H_i a G_i|_{U_i})}$ и, следовательно, $\overline{W(H_i b G_i|_{V_i})} \subset \overline{W(H_i a G_i|_{U_i})}$.

Для пункта $s_i,\ i = 1,2,\dots,n$, существуют окрестности $U_{\delta_i}(s_i) \subset U_{i-1} \cap U_i \cap \boldsymbol{T}$, для которых $f \in L_N^{2,\alpha}(U_{\delta_i}(s_i))$, $\|f\| = 1$ и

$$|< H_i b G_i f, f >| \le \varepsilon_i + \int_{U_{\delta_i}(s_i)} < H_i \psi_i G_i f(t), f(t) > d\mu(t).$$

Значит, $\overline{W\left(H_i b G_i|_{U_{\delta_i}(s_i)}\right)} \subset \overline{W\left(H_i a G_i|_{U_i}\right)} + \overline{U_{\varepsilon_i}(0)}$.

Рассмотрим непрерывную функцию

$$c : [0,1] \to L_{N\times N}^{\infty,\alpha}(\overline{D}); \ s \mapsto c_s, \ c_s(z) = sa(z) + (1-s)b(z) \text{ для } z \in \overline{D}.$$

Для $t \in V_i$ и $f \in L_N^{2,\alpha}(V_i)$ с $\|f\| = 1$ $< H_i c_s G_i f, f >$ лежит в $\overline{W\left(H_i a G_i|_{U_i}\right)}$. Следовательно, $\overline{W\left(H_i c_s G_i|_{V_i}\right)} \subset \overline{W\left(H_i a G_i|_{U_i}\right)}$.

И для $t \in U_{\delta_i}(s_i)$ $\overline{W\left(H_i c_s G_i|_{U_{\delta_i}(s_i)}\right)} \subset \overline{W\left(H_i a G_i|_{U_i}\right)} + \overline{U_{\varepsilon_i}(0)}$.

Из первой части теоремы 2 следует, что T_{c_s} есть оператор Фредгольма. Преобразование $s \mapsto T_{c_s}$ непрерывное, поэтому $\operatorname{Ind} T_{c_s}$ есть постоянная на $[0,1]$. Отсюда следует, что $\operatorname{Ind} T_a = \operatorname{Ind} T_b$. Так как b непрерывная функция, то справедливо равенство $\operatorname{Ind} T_a = -\operatorname{Ind} \det b$.

Теорема доказана.

Иджеванский филиал ЕГУ *Поступила 07.05.2007*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Albrecht E.** – Banach Center Publications, 1982, v. 8, p. 9–30.

2. **Zeidler E.** – Applied mathematical sciences 109. New York: Springer, 1995.
3. **Boettcher A.** Silbermann Analysis of Teoplitz operators. Berlin: Springer, 1990.
4. **Douglav R.G.** Banach algebra techniques in operator theory. New York: Academic Press, 1995.
5. **Bonsal F.F., Duncan J.** – London Mathematical Society. Lecture Note, 1971, Series 2.

Մ. Ա. ԶԱՔԱՐՅԱՆ, Ա. Վ. ՑՈՒՑՈՒԼՅԱՆ

ՄԻ ՖՐԵԴՀՈԼՄՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇ ԵՎ ՏԵՈՊԼԻՑԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ԻՆԴԵՔՍԸ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԻԼԲԵՐՏՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրված է Տեոպլիցի օպերատորների ֆրեդհոլմյան դառնալու բավարար մի հայտանիշ: Հաշվված է նաև ֆրեդհոլմյան օպերատորի ինդեքսը անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ հիլբերտյան տարածություններում կոմպլեքս հարթության միավոր շրջանում:

M. A. ZAKARYAN, A. V. TZUTZULYAN

THE FREDHOLM CRITERION AND INDEX CALCULATION OF TEOPLITS OPERATORS IN SOME HILBERT SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS

Summary

The paper studied the Fredholm criterion of Teoplits operators in some Hilbert spaces of analytic functions on the unit disk in the complex plane C. The index of those operators was calculated.