ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ * СООБЩЕНИЯ

Математика

УДК 517.9

В. Ж. ДУМАНЯН

ОБ ОЦЕНКЕ $\int|\nabla u|^2dx$ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Доказано неравенство, оценивающее норму в L_2 по строго внутренней подобласти градиента обобщенного (из $W^1_{2,loc}$) решения эллиптического уравнения второго порядка через нормы в L_2 самого решения и правой части уравнения.

Пусть Q – произвольная ограниченная область в R^n, $n\geq 2$. В области Q рассматривается линейное эллиптическое уравнение второго порядка с младшими производными:

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(c_i(x)u)_{x_i}+d(x)u=f(x)-divF(x),\ x\in Q,\quad (1)$$

где $f(x)$ и $F(x)=(f_1(x),f_2(x),...,f_n(x))$ принадлежат $L_{2,loc}(Q)$, $A(x)=(a_{ij}(x))$ – симметрическая матрица, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями и удовлетворяют условию

$$\gamma|\xi|^2\leq(\xi,A\xi)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\gamma^{-1}|\xi|^2 \quad (2)$$

для всех $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in R^n$ и п.в. $x\in Q$ с положительной постоянной γ, а коэффициенты $b(x)=(b_1(x),b_2(x),...,b_n(x))$, $c(x)=(c_1(x),c_2(x),...,c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

Функция u из $W^1_{2,loc}(Q)$ называется обобщенным решением уравнения (1), если для всех финитных функций η из $W^1_2(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_Q((A\nabla u,\nabla\eta)+(b,\nabla u)\eta+(cu,\nabla\eta)+du\eta)dx=\int_Q(f\eta+(F,\nabla\eta))dx. \quad (3)$$

Конечно, множество допустимых правых частей уравнения (1) можно расширить – можно рассматривать правые части из $W^{-1}_2(Q)$. Тогда под выражением, стоящим в правой части тождества (3), понимается значение соответствующего функционала на элементе η (см. [1–3]). (1) можно понимать и как равенство обобщенных функций.

Пусть Ω' и Ω – произвольные области из Q, удовлетворяющие условию

$$\Omega' \subset\subset \Omega \subset\subset Q\,. \tag{4}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть функция $u \in W^1_{2,loc}(Q)$ есть обобщенное решение уравнения (1) и пусть Ω', Ω – произвольные области, удовлетворяющие условию (4). Тогда

$$\int\limits_{\Omega'} |\nabla u|^2\,dx \le C(n,\gamma)\left(\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{\Omega} u^2 dx + \int\limits_{\Omega}\left(|b|^2+|c|^2+|d|\right)u^2 dx + \sigma^2\int\limits_{\Omega} f^2 dx + \int\limits_{\Omega}|F|^2\,dx\right),$$

где $\sigma = \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Доказательство. Пусть u – решение уравнения (1) и пусть $\varsigma(x)$ – гладкая срезающая функция такая, что

$$\varsigma(x)=1,\quad x\in\Omega', \qquad \varsigma(x)=0, x\in \Omega^{\frac{\sigma}{2}} \equiv \{\,x\in\Omega : \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) < \frac{\sigma}{2}\,\},$$

$$0 \le \varsigma(x) \le 1,\quad x\in\Omega, \qquad \left|\nabla\varsigma(x)\right| \le \frac{M}{\sigma},\ M \text{ – некоторая постоянная.}$$

Очевидно, функция $\varsigma^2 u$ принадлежит $W^1_2(Q)$ и финитна. Следовательно, ее можно подставить в интегральное тождество (3). Тогда будем иметь

$$\int\limits_{Q}((A\nabla u,\nabla u)\varsigma^2 + 2\varsigma u(A\nabla u,\nabla\varsigma) + (b,\nabla u)\varsigma^2 u + 2\varsigma u(cu,\nabla\varsigma) + (cu,\nabla u)\varsigma^2 + d\varsigma^2 u^2)dx =$$

$$= \int\limits_{Q}(f\varsigma^2 u + 2\varsigma u(F,\nabla\varsigma) + (F,\nabla u)\varsigma^2)dx\,.$$

Далее, в силу (2) и свойств функции $\varsigma(x)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$\gamma\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\varsigma^2 dx \le C_1(n,\gamma)\int\limits_{\Omega}\frac{|u||\nabla u|\varsigma}{\sigma}dx + \int\limits_{\Omega}|b||u||\nabla u|\varsigma^2 dx + \int\limits_{\Omega}\frac{2M|c|u^2\varsigma}{\sigma}dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega}|c||u||\nabla u|\varsigma^2 dx + \int\limits_{\Omega}|d|u^2\varsigma^2 dx + \int\limits_{\Omega}|f||u|\varsigma^2 dx + \int\limits_{\Omega}\frac{2M|F||u|\varsigma}{\sigma}dx + \int\limits_{\Omega}|F||\nabla u|\varsigma^2 dx \le$$

$$\le C_2(n,\gamma)\left(\varepsilon\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\varsigma^2 dx + \frac{1}{\varepsilon\sigma^2}\int\limits_{\Omega}u^2 dx + \varepsilon\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\varsigma^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega}|b|^2 u^2 dx + \right.$$

$$+\int\limits_{\Omega}|c|^2 u^2 dx + \frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{\Omega}u^2 dx + \varepsilon\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\varsigma^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega}|c|^2 u^2 dx + \int\limits_{\Omega}|d|u^2 dx + \sigma^2\int\limits_{\Omega}f^2 dx +$$

$$\left.+\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{\Omega}u^2 dx + \int\limits_{\Omega}|F|^2 dx + \frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{\Omega}u^2 dx + \varepsilon\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\varsigma^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega}|F|^2 dx\right) \le$$

$$\le C_2(n,\gamma)\left(4\varepsilon\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\varsigma^2 dx + \left(\frac{1}{\varepsilon\sigma^2} + \frac{3}{\sigma^2}\right)\int\limits_{\Omega}u^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega}|b|^2 u^2 dx + \right.$$

$$+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_\Omega |c|^2 u^2dx+\int_\Omega |d|u^2dx+\sigma^2\int_\Omega f^2dx+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_\Omega |F|^2dx\Bigg).$$

Пусть $4\varepsilon C_2<\gamma$. Тогда

$$\int_{\Omega'}|\nabla u|^2dx\le\int_\Omega|\nabla u|^2\varsigma^2dx\le C(n,\gamma)\left(\frac{1}{\sigma^2}\int_\Omega u^2dx+\int_\Omega\left(|b|^2+|c|^2+|d|\right)u^2dx+\sigma^2\int_\Omega f^2dx+\int_\Omega|F|^2dx\right),$$

что и требовалось доказать. Заметим, что в случае ограниченных (в Q) коэффициентов имеет место оценка

$$\int_{\Omega'}|\nabla u|^2dx\le C(n,\gamma)\left(\frac{1}{\sigma^2}\int_\Omega u^2dx+\sigma^2\int_\Omega f^2dx+\int_\Omega|F|^2dx\right).$$

Кафедра численного анализа и математического моделирования

Поступило 19.11.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1967.
2. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1987.
3. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

Վ. Ժ. ԴՈՒՄԱՆՅԱՆ

ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԷԼԻՊՍԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ $\int|\nabla u|^2dx$-Ի ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ապացուցված է անհավասարություն, որը գնահատում է երկրորդ կարգի էլիպսական հավասարման ընդհանրացված ($W^1_{2,loc}$-ից) լուծման գրադիենտի խիստ ներքին ենթատիրույթով L_2 նորմը հավասարման լուծման և նրա աջ մասի L_2 նորմերով:

V. Zh. DUMANYAN

ON THE ESTIMATION OF $\int|\nabla u|^2dx$ FOR SOLUTIONS OF SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATIONS

Summary

In this article an inequality is proved, which estimates the norm in L_2 of the gradient of a generalized (belonging to $W^1_{2,loc}$) solution of a second order elliptic equation over the strict interior subregion through the norms in L_2 of the solution itself and the right hand side of the equation.