ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 518. 519

А.М. МОВСИСЯН

ОБ ОДНОМ СТАНДАРТНОМ СВЕРТОЧНОМ ТОЖДЕСТВЕ

В данной работе рассматривается один сверточный многочлен векторного пространства над полем. Доказывается, что этот стандартный многочлен является сверточным (стандартным) тождеством.

В настоящей работе сверточные многочлены и тождества понимаются в смысле [1–3]. Основным результатом работы является следующая

Теорема. Пусть V – векторное пространство размерности m–1 над полем k. Тогда сверточное тождество на V имеет вид

$$f_{\text{ст}} = \sum_{\rho\in S_m} Sgn\rho S^1_{\rho(1)} S^2_{\rho(2)} ... S^m_{\rho(m)} \tag{1}$$

(суммирование ведется по всем элементам группы подстановок S_m множества 1, 2,…, m).

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{I}$ множество {1, 2,…, m}. Сверточный многочлен (1) сильно однороден, и его носитель равен ($\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}$). По теореме 1 из [2] достаточно доказать, что равны 0 все значения (1) на базисе пространства $T(\mathfrak{I},\mathfrak{I})$. Но отображение, сопоставляющее каждому элементу этого пространства значение сверточного многочлена, линейно, и поэтому достаточно проверить, что значения сверточного многочлена (1) обращаются в 0 на всех элементах некоторого базиса пространства $T(\mathfrak{I},\mathfrak{I})$.

Пусть $e_1, e_2, ..., e_{m-1}$ – базис V, $e^1, ..., e^{m-1}$ – дуальный ему базис V^*. Базис пространства $T(\mathfrak{I},\mathfrak{I}) = V^{\otimes\mathfrak{I}} \otimes (V^*)^{\otimes\mathfrak{I}}$ состоит из тензоров вида

$$u = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes ... \otimes e^{j_m}.$$

Среди индексов $j_1, j_2, ..., j_m$ обязательно найдутся хотя бы два одинаковых (например j_s, j_t). Обозначим через A_m знакопеременную подгруппу группы S_m, через τ – транспозицию (s, t).

Значение сверточного многочлена (1) на тензоре u равно:

$$\sum_{\rho\in S_m} Sgn\rho\, \xi^1_{\rho(1)} \xi^2_{\rho(2)} ... \xi^m_{\rho(m)} u = \sum_{\rho\in A_m} \left(\xi^1_{\rho(1)} \xi^2_{\rho(2)} ... \xi^m_{\rho(m)} - \xi^1_{\rho\tau(1)} \xi^2_{\rho\tau(2)} ... \xi^m_{\rho\tau(m)} u \right) =$$

$$\sum_{\rho\in A_m} \Big[\delta\left(j_1, i_{\rho(1)}\right) ... \delta\left(j_s, i_{\rho(s)}\right) ... \delta\left(j_t, i_{\rho(t)}\right) ... \delta\left(j_m, i_{\rho(m)}\right) - \delta\left(j_1, i_{\rho\tau(1)}\right) ... \delta\left(j_s, i_{\rho\tau(s)}\right) ...$$

$$\ldots\delta\left(j_t, i_{\rho\tau(t)}\right)\ldots\delta\left(j_m, i_{\rho\tau(m)}\right)\Big] = \sum_{\rho\in A_m}\Big[\delta\left(j_1, i_{\rho(1)}\right)\ldots\delta\left(j_s, i_{\rho(s)}\right)\ldots\delta\left(j_t, i_{\rho(t)}\right)\ldots\delta\left(j_m, i_{\rho(m)}\right) -$$

$$-\delta\left(j_1, i_{\rho(1)}\right)\ldots\delta\left(j_t, i_{\rho(t)}\right)\ldots\delta\left(j_s, i_{\rho(s)}\right)\ldots\delta\left(j_m, i_{\rho(m)}\right)\Big] = 0$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\rho\tau(i) = \rho(i)$ при $i \neq s,t$, $\rho\tau(t) = \rho(s)$, $j_t = j_s$; $\delta(x,y)$ как всегда обозначает функцию Кронекера, равную 0 при $x \neq y$ и 1 при $x = y$).

Итак, значения (1) на всех базисных элементах пространства $T(\mathfrak{I}, \mathfrak{I})$ равны 0, что и требовалось доказать.

Сверточный многочлен $f_{\text{ст}}$ мы будем называть стандартным сверточным многочленом степени *m*. Его удобно записать в форме определителя из операторов S_j^i:

$$\begin{vmatrix} S_1^1 & S_2^1 & \ldots & S_m^1 \\ S_1^2 & S_2^2 & \ldots & S_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_1^m & S_2^m & \ldots & S_m^m \end{vmatrix}.$$

Кафедра общеобразовательных дисциплин

Поступило 04.04.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Яковлев А.В., Мовсисян А.М.** – Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. мат. ин-та АН СССР, 1982, т. 114, с. 241–214.
2. **Мовсисян А.М.** – Ученые Записки ЕГУ, 2001, № 2, с. 9–13
3. **Размыслов Ю.П.** Тождества алгебр и их представлений. М., 1989.

Ա. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ՄԻ ՍՏԱՆԴԱՐՏ ՓԱԹԱԹՄԱՆ ՆՈՒՅՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է փաթաթման մի բազմանդամ, որը հանդիսանում է ստանդարտ փաթաթման նույնություն վեկտորական տարածության վրա: Նույնությունը կարելի է գրել որոշիչի տեսքով՝ կազմված օպերատորներից:

A. M. MOVSISIAN

ONE STANDARD CONVOLUTION IDENTITY

Summary

In this paper one standard convolution identity of vector space is considered. This identity can be presented as a determinant of operators.