

*Механика*

УДК 621.983

Յ. Ա. ՆԱԶԱՐՅԱՆ, Մ. Մ. ԱՐԱԿԵԼՅԱՆ, Ա. Տ. ՄԱՐԿՕՅԱՆ, Ն. Ն. ԱՐԱԲ

БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ ТОНКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ. II

Показана принципиальная возможность решения задач конечного формоизменения при плоском напряженном состоянии с учетом взаимосвязанного изменения толщины и деформационного упрочнения. Для разноименного и одноименного напряженных состояний определены размеры пластической области и распределение компонент деформаций.

Проблема интегрирования уравнения (13) из работы [1] заключается в том, что в общем случае интенсивность приращений деформаций  $d\varepsilon_i$  не равняется приращению интенсивности деформаций [2]. Такое утверждение с очевидностью вытекает из сопоставления выражения для интенсивности конечных деформаций с зависимостью (11) [1].

В соотношениях (4) [1] приращения главных деформаций отнесены к текущему деформированному состоянию и предполагается, что главные оси деформаций в процессе формоизменения не вращаются. При этом суммирование приращений деформаций приводит к текущим величинам логарифмических деформаций, удовлетворяющим условию постоянства объема:

$$\varepsilon_\rho = \ln \frac{d\rho}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \ln \frac{\rho}{r}, \quad \varepsilon_z = \ln \frac{s}{s_0}, \quad (1)$$

где  $\rho$ ,  $s$  и  $r$ ,  $s_0$  – текущая координата и толщина рассматриваемой материальной частицы в деформированном и исходном состояниях соответственно.

Перед интегрированием уравнения (13) [1] рассмотрим две различные интерпретации полученных результатов. Если рассматривать деформацию фиксированной материальной частицы при изменении диаметров свободных от нагрузки контуров (в качестве параметра времени), то интегрирование указанного уравнения позволит определить величину и характер накопления деформаций, т.е. путь деформаций рассматриваемой материальной частицы (переменные Лагранжа). Если же рассматривать деформации различных материальных частиц при данной текущей величине изменения диаметров свободных от нагрузки контуров, то интегрирование указанного уравнения позволит определить распределение интенсивности деформаций (переменные Эйлера).

В общем случае интегралы вида  $\int d\varepsilon_i$  можно вычислить, если известны пути деформаций [2]. Из тригонометрических форм представления компонент приращения деформаций (10) [1] следует зависимость между углом вида деформированного состояния и отношением  $d\varepsilon_\theta/d\varepsilon_\rho$ :

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2} + \frac{d\varepsilon_\theta}{d\varepsilon_\rho} \right). \quad (2)$$

Таким образом, интенсивность приращения деформаций и приращение интенсивности деформаций равны между собой только при постоянстве отношения  $d\varepsilon_\theta/d\varepsilon_\rho$ . В этом случае из (2) следует, что пути деформаций являются радиальными.

В связи с изложенным представляется целесообразным рассмотреть изменение отношения  $d\varepsilon_\theta/d\varepsilon_\rho$  для данной материальной частицы при изменении диаметров свободных от нагрузки контуров на заданную величину, что приводит к непрерывному изменению размеров пластической области во внешней и внутренней кольцевых пластинах. То есть процесс деформирования носит ярко выраженный нестационарный характер, а изменение координаты рассматриваемой материальной частицы сопровождается одновременным изменением размеров пластической области. Значение отношения деформаций определяется расстоянием данной материальной частицы от свободного от нагрузки контура. Следовательно, величина этого отношения для данной материальной частицы изменяется сравнительно мало.

Интегрируя (13) [1] с учетом (7) [1] и предположения о постоянстве отношения  $d\varepsilon_\theta/d\varepsilon_\rho$ , получим

$$\sigma_\rho = \frac{A}{1+n} \varepsilon_i^{1+n} + c, \quad (3)$$

где постоянную интегрирования ( $c$ ) находим из граничных условий, по которым свободные от нагрузки контуры деформируются в окружном направлении в условиях линейного сжатия для внешней кольцевой зоны (отрицательное направление оси  $\varepsilon_\theta$ ) и линейного растяжения для внутренней кольцевой зоны (положительное направление оси  $\varepsilon_\theta$ ) (рис. 3, б) [1].

Приравнявая выражения для радиальных напряжений (3) и (12) из [1], получим

$$\left| \varepsilon_i^{1+n} - \varepsilon_{\varepsilon\theta}^{1+n} \right| = (1+n) \varepsilon_i^n \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varphi + \pi/6), \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{\varepsilon\theta}$  – величина окружной деформации свободных от нагрузки контуров. Угол  $\varphi$  меняется для внешней кольцевой пластины в пределах  $0 \leq \varphi \leq \pi/3$  и для внутренней кольцевой пластины в пределах  $4\pi/3 \leq \varphi \leq 11\pi/6$ .

На основе полученного решения рассмотрим начальный этап деформирования, когда ширина пластической области имеет наибольшие размеры, а величина окружной деформации свободного от нагрузки контура равна нулю. Для этого случая из (4) имеем

$$\varepsilon_i = (1+n) \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varphi + \pi/6). \quad (5)$$

Сопоставляя (5) с (12) из [1], можно заметить, что на девиаторной плоскости распределение интенсивности деформаций и распределение растягивающих напряжений подобны. Из (5) можно определить наибольшие размеры пластической области и установить распределение деформаций при взаимосвязанном изменении толщины и деформационного упрочнения.

Из сопоставления тригонометрической формы представления приращенной окружной деформации и зависимости (5) следует

$$\frac{d\rho}{\rho} = (1+n) \left( \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{6} \cos^2 \varphi \right) d\varphi, \quad (6)$$

а после интегрирования –

$$\ln \rho = (1+n) \left[ \frac{\sqrt{3}}{3} \varphi - \frac{1}{4} \cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{12} \sin 2\varphi \right] + c. \quad (7)$$

Постоянную интегрирования находим из следующих граничных условий:

- а) для внешней кольцевой зоны  $\sigma_\rho = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ,  $\rho = R_0$ ;
- б) для внутренней кольцевой зоны  $\sigma_\rho = 0$ ,  $\varphi = \frac{4}{3} \pi$ ,  $\rho = r_0$ .

С учетом граничных условий выражение (7) после некоторых преобразований принимает вид:

- а) для внешней кольцевой зоны

$$\frac{R_0}{\rho} = \exp \left\{ (1+n) \left[ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} (\pi/3 - \varphi) + \frac{1}{4} \cos 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{12} \sin 2\varphi \right] \right\}; \quad (8)$$

- б) для внутренней кольцевой зоны

$$\frac{\rho}{r_0} = \exp \left\{ (1+n) \left[ \frac{\sqrt{3}}{3} (\varphi - 4\pi/3) - \frac{1}{4} \cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{12} \sin 2\varphi \right] \right\}. \quad (9)$$

Из зависимостей (8) и (9) следует, что пластическая область имеет наибольшие размеры при  $\rho = a$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = 11\pi/6$ :

- а) для внешней кольцевой зоны

$$\frac{R_0}{a} = \exp \left[ (1+n) \left( \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{3} \right) \right] \approx \exp[0,854(1+n)]; \quad (10)$$

- б) для внутренней кольцевой зоны

$$\frac{a}{r_0} = \exp \left[ (1+n) \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] \approx \exp[0,906(1+n)]. \quad (11)$$

Аналогичный результат для случая а) получен нами в работе [3] с учетом изменения толщины при идеально жесткой пластической модели деформируемого материала.

Имея выражение, описывающее характер распределения интенсивности деформаций, можно определить текущие величины и распределение компонент деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\rho &= \frac{1+n}{2} \left(1 + \cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2\varphi\right), \\ \varepsilon_\theta &= -\frac{1+n}{2} \left(\cos 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2\varphi\right), \\ \varepsilon_z &= -\frac{1+n}{2} \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2\varphi\right),\end{aligned}\tag{12}$$

где угол  $\varphi$  меняется для внешней и внутренней кольцевых пластин в указанных выше пределах.

На рис. 1 (а, б) представлены графики изменений интенсивности и компонент деформаций в указанных диапазонах  $\varphi$ .

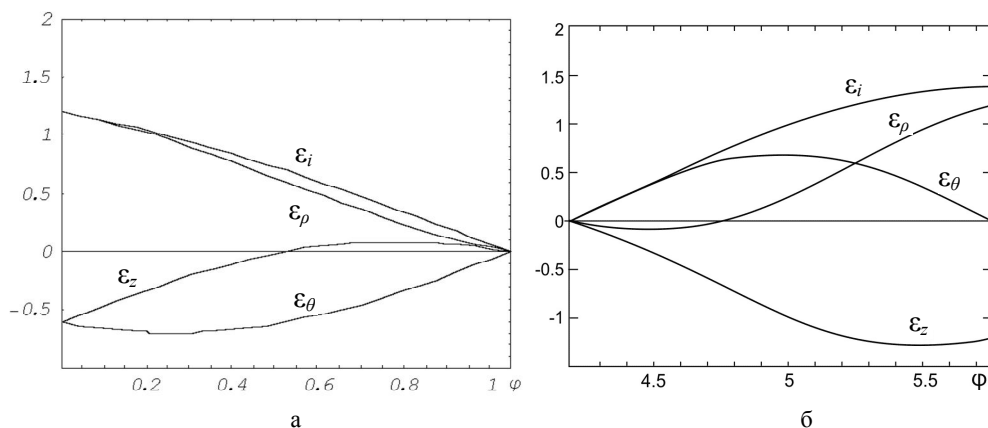


Рис. 1.

Из представленных графиков следует, что на начальном этапе формирования кольцевой пластины вблизи внешнего контура образуется зона утолщения, а вблизи внутреннего контура – зона отрицательных радиальных деформаций.

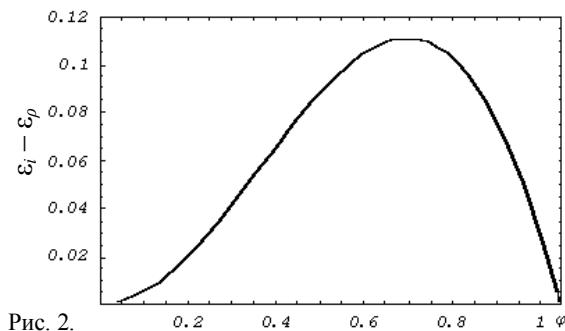


Рис. 2. Из представленных графиков следует, что максимальная разница (порядка 10%) имеет место при  $\varphi \approx 0,7$ .

Для внешней кольцевой пластины величины интенсивности и радиальной компоненты деформаций отличаются незначительно. На рис. 2 представлен график зависимости разности указанных деформаций от параметра  $\varphi$ , из которого следует, что максимальная разница (порядка 10%) имеет место при  $\varphi \approx 0,7$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Չ.Ա. Նազարյան, Մ.Մ Արակելյան, Ա.Տ. Մարկոսյան, Ն.Ն. Արաբ** – Ученые записки ЕГУ, 2008, № 2, с. 34–40.
2. **Малинин Н.Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. М., 1975, 400 с.
3. **Նազարյան Չ.Ա., Константинов В.Ф.** – Вестник машиностроения, М., 1999, № 2, с. 35–41.

Է. Ա. ՆԱԶԱՐՅԱՆ, Մ. Մ. ԱՐԱԿԵԼՅԱՆ, Ա. Ս. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ, Ն. Ն. ԱՐԱԲ

ԲԱՐԱԿ ՕՂԱԿԱԶԵՎ ԹԻԹԵՂԻ ՄԵԾ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԸ: II

### Ամփոփում

Հարթ լարվածային վիճակի դեպքում հաստության և դեֆորմացիոն ամրացման փոխկապակցված փոփոխության պայմաններում ցույց է տրված վերջավոր ձևափոխության խնդրի լուծման սկզբունքային հնարավորությունը: Միանշան և տարանշան լարված վիճակների համար որոշված են պլաստիկության տիրույթի չափերը և դեֆորմացիաների բաղադրիչների բաշխումը:

E. A. NAZARYAN, M. M. ARAKELYAN, A. S. MARKOSYAN, N. N. ARAB

LARGE DEFORMATIONS OF THIN RING PLATE. II

### Summary

The basic opportunity of the decision of tasks final forming is shown at plain stress condition in view of interconnected change thickness and hardening deformation parameter. For opposite sign and similar sing conditions the sizes of plastic area and distribution component of deformations are determined.