ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2007 Естественные науки

Ինֆորմատիկա

УДК 510.64

Ս. Ռ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ

ԴԱՍԱԿԱՆ ԱՍՈՒՅԹԱՅԻՆ ՀԱՇՎԻ ՈՐՈՇ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ ԱՐՏԱԾՈՒՄՆԵՐԻ ՆՈՐՄԱԼ ՏԵՍՔԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄ

Դասական ասույթային հաշվի (ԴԱՀ) հայտնի ավանդական համակարգերի համար նկարագրված են արտածումների կառուցման ստանդարտ ալգորիթմներ, որոնք հիմնված են ԴԱՀ-ում ցանկացած նույնաբանության արտածման Կալմարի ապացույցի վրա: Սակայն վերջինս կիրառելի չէ այժմ ակտիվորեն հետազոտվող մի շարք ոչ ավանդական համակարգերի համար, ինչպիսիք են «Cutting Planes» և «Resolution» համակարգերը [1]:

Սույն աշխատանքում առաջարկվում են արտածման կառուցման «ստանդարտ» եղանակներ, որոնք «Cutting Planes» և «Resolution» համակարգերում հիմնված են «փոփոխականների ավելացման» եղանակի վրա:

Հիմնվելով արտածումների առաջարկված ընթացակարգի վրա և օգտագործելով [2]-ում ներմուծված մինիմալ φ-որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի գաղափարն ու հատկությունները՝ վերոհիշյալ երկու համակարգերի համար կարելի է տալ արտածումների բարդության վերին և ստորին գնահատականներ:

1. «Cutting Planes» և «Resolution» համակարգերում արտածումների նորմալ տեսքի նկարագրում: Այստեղ նկարագրվում է երկու համակարգերում՝ «Cutting Planes» և «Resolution», ցանկացած նույնաբանության արտածումների կառուցման մի ընթացակարգ, որը հիմնվում է «փոփոխականների ավելացման» եղանակի վրա:

1.1. *«Cutting Planes» (CP) համակարգի նկարագրությունը:* CP համակարգը միտված է կոնյունկտիվ նորմալ ձևով (կ.ն.ձ.) տրված բանաձևերի հերքմանը: CP-ում բանաձևերը ներկայացվում են գծային անհավասարությունների համակարգի միջոցով:

Մինչև CP համակարգի ֆորմալ սահմանումը՝ բացատրենք նրա իմաստն ու կիրառումը որևէ բանաձևի համար:

Օրինակ, $A=(\overline{x}\,\&\,\overline{y})\vee(x\,\&\,\overline{y})\vee(\overline{x}\,\&\,y)\vee(x\,\&\,y)$ նույնաբանության ժխտումը՝ $\overline{A}=(x\vee y)\,\&\,(\overline{x}\vee y)\,\&\,(x\vee\overline{y})\,\&\,(\overline{x}\vee\overline{y})$, արտահայտվում է CP-ում թվաբանական հավասարումների հետևյալ խմբով.

$$x + y \geq 1, \tag{1}$$
$$1 - x + y \geq 1, \tag{2}$$
$$x + 1 - y \geq 1, \tag{3}$$
$$1 - x + 1 - y \geq 1, \tag{4}$$

որտեղ $\bar{A}$-ի յուրաքանչյուր դիզյունկտիվ համապատասխանում է մեկ անհավասարություն: CP-ում արտածման կանոնները ընդգրկում են անհավասարությունների գումարում և անհավասարության բաժանում դրական ամբողջ թվի վրա:

Գումարելով (1)-ը և (2)-ը՝ կստանանք $2y \geq 1$, բաժանելով 2-ի վրա՝ $y \geq \lceil 1/2 \rceil = 1$: Այնուհետև գումարելով (3)-ը և (4)-ը՝ կստանանք $1 \geq 2y$, բաժանելով 2-ի վրա՝ $0 = \lfloor 1/2 \rfloor \geq y$: Ստացանք $0 \geq y$ և $y \geq 1$՝ հակասություն:

Այժմ տանք CP համակարգի ֆորմալ սահմանումը՝ հետևելով [1]-ին:

Սահմանենք CP արտահայտությունների դասը (ξ):

Սահմանում: Եթե $a \in Z$ (ամբողջ թվերի բազմություն) և $i \in N$ (բնական թվերի բազմություն), x_i-ն թվաքանական փոփոխական է, ապա $a \in \xi$ և $(a \cdot x_i) \in \xi$: Եթե $E, F \in \xi$ և $a \in Z$, ապա $(a \cdot E) \in \xi$ և $(E + F) \in \xi$: c դրական ամբողջ թիվը բաժանում է $E = \sum a_i \cdot E_i$, $E \in \xi$, արտահայտությունը (նշանակվում է $c \mid E$), եթե բոլոր i-րի համար $c \mid a_i$: Քանորդն է $E' = \sum b_i \cdot E_i$, որտեղ $b_i = a_i / c$: CP-ի բանաձևերը ունեն $E \geq F$ տեսքը, որտեղ $E, F \in \xi$:

CP համակարգը ունի արտածման հինգ կանոն՝ տրանզիտիվության, պարզեցման, գումարման, բազմապատկման և բաժանման:

<u>Տրանզիտիվություն.</u> $\dfrac{E \geq F \quad F \geq G}{E \geq G}$:

<u>Պարզեցում.</u> գումարումը կոմուտատիվ է և ասոցիատիվ; բազմապատկումը կոմուտատիվ է, ասոցիատիվ և դիստրիբուտիվ գումարման նկատմամբ; նույն արտահայտությունները կարելի է ընդհանուր հանել (օրինակ, $\alpha \cdot E + b \cdot E$ արտահայտությունը կարելի է փոխարինել $(a + b) \cdot E$-ով); ամբողջ թվերի գումարները և արտադրյալները կարելի է հաշվել; արտահայտությունը կարելի է տեղափոխել անհավասարության մյուս կողմը՝ փոխելով գործակցի նշանը; $0 \cdot E$-ն կարելի է փոխարինել 0-ով:

<u>Գումարում.</u> $\dfrac{E \geq F \quad G \geq H}{E + G \geq F + H}$:

<u>Բազմապատկում $c \in N$-ով.</u> $\dfrac{E \geq F}{c \cdot E \geq c \cdot F}$:

<u>Բաժանում.</u> եթե $c \in N$, $c > 0$, $b \in Z$, $c \mid E$ և ստացվում է E' քանորդ, ապա $\dfrac{E \geq b}{E' \geq \lceil b/c \rceil}$, որտեղ $\lceil a \rceil$-ն կհասկանանք այն ամենափոքր ամբողջ թիվը, որը գերազանցում է a-ն: Որպեսզի ապացուցենք, որ դիզյունկտիվ նորմալ ձևով (դ.ն.ձ.) ներկայացված A բանաձևը նույնաբանություն է,

$B=\neg A$ բանաձևն արտահայտում ենք կ.ն.ձ.-ով՝ $B=\&_{i\in I}D_i$, որտեղ յուրաքանչյուր $D_i=\varepsilon(x_{i,1})\vee\varepsilon(x_{i,2})\vee\cdots\vee\varepsilon(x_{i,l_i})$ տարրական դիզյունկտ է, $\varepsilon(x_{i,j})$-ն տրամաբանական փոփոխական է կամ նրա ժխտում: CP համակարգում x տրամաբանական փոփոխականին համապատասխանում է $R(x)=\mathrm{x}$, իսկ $\overline{x}$-ին՝ $R(\overline{x})=1-\mathrm{x}$ թվաբանական արտահայտությունները: $R(\vee_{j\in J}\varepsilon(x_{i,j}))$-ն սահմանենք $\sum_{j\in J}R(\varepsilon(x_{i,j}))\geq 1$ անհավասարությամբ: Վերջապես, $R(B)$-ն $\{R(\vee_{j\in J}\varepsilon(x_{i,j})) : i\in I\}$ գծային անհավասարությունների համակարգն է:

CP համակարգի աքսիոմներն են՝ $1\geq 0$, $1\geq 1$, $\mathrm{x}\geq\mathrm{x}$, $\mathrm{x}\geq 0$, $1\geq\mathrm{x}$ անհավասարությունները, որտեղ x-ը թվաբանական փոփոխական է:

Սահմանում: Կասենք, որ կ.ն.ձ.-ով տրված B բանաձևը CP-հերքելի է, եթե գոյություն ունի $s_0,\ldots,s_m$ գծային անհավասարությունների հաջորդականություն, այնպիսին որ

- s_m-ը $0\geq 1$-ն է,
- ցանկացած $i\leq m$ համար s_i-ն կամ CP համակարգի աքսիոմ է՝ $1\geq 0$, $1\geq 1$, $\mathrm{x}\geq\mathrm{x}$, $\mathrm{x}\geq 0$, $1\geq\mathrm{x}$, որտեղ x-ը B-ի որևէ տրամաբանական փոփոխականին համապատասխանող թվաբանական փոփոխականն է, կամ B-ի դիզյունկտներից մեկին վերոհիշյալ եղանակով համապատասխանող անհավասարությունն է, կամ s_i-ն ստացվում է իր նախորդներից տրանզիտիվության, պարզեցման, գումարման, բազմապատկման և բաժանման կանոնների համաձայն:

$\neg A$ բանաձևի CP-հերքումը կանվանենք A բանաձևի CP-արտածում:

1.2. *CP-ում արտածում կառուցելու ընթացակարգը:* Դիցուք A նույնաբանության փոփոխականներն են $x_1,x_2\ldots,x_n$-ը: Նկարագրենք մի ընթացակարգ, որի համաձայն $3\cdot 2^n\cdot n$ քայլում $\neg A$-ի դիզյունկտներին համապատասխան անհավասարություններից կարելի է CP-ում արտածել $0\geq 1$ անհավասարությունը:

Ցույց տանք, որ կարելի է $\neg A$-ի դիզյունկտներին համապատասխանող անհավասարություններից CP-ում $\forall m$-ի համար $(1\leq m\leq n)$ $2^n\cdot n+2\cdot(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^m)$ քայլում բոլոր $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_m)\in E^m$ (m-չափանի միավոր խորանարդ) հավաքների համար արտածել հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha(\mathrm{x}_i,\delta_i)\geq 1,\ \text{որտեղ}\ \alpha(\mathrm{x}_i,\delta_i)=\begin{cases}\mathrm{x}_i, & \text{եթե}\ \delta_i=0\\ 1-\mathrm{x}_i, & \text{եթե}\ \delta_i=1\end{cases}:$$

ա) Նախ ապացուցենք պնդումը $m=n$-ի համար: Ցանկացած $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)\in E^n$ հավաքի համար եթե $x_i=\delta_i$, $i=\overline{1,n}$, $\neg A$-ն հավասար է 0: Այսինքն՝ $\neg A$-ի որևէ դիզյունկտը հավասար է 0: Ենթադրենք այդ դիզյունկտը $x_{i1}\vee\ldots\vee x_{ik}\vee\overline{x_{ik+1}}\vee\ldots\vee\overline{x_{ik+l}}$ է: Ուրեմն՝ $\delta_{i1}\vee\ldots\vee\delta_{ik}\vee\overline{\delta_{ik+1}}\vee\ldots\vee\overline{\delta_{ik+l}}=0$, այսինքն՝ $\delta_{i1}=\ldots=\delta_{ik}=0$ և $\delta_{ik+1}=\ldots=\delta_{ik+l}=1$: Այդ դիզյունկտին համապատասխանում է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$x_{i1}+\ldots+x_{ik}+1-x_{ik+1}+\ldots 1-x_{ik+l}\geq 1:$$

Դիտարկենք այն փոփոխականները $x_1,x_2\ldots,x_n$-ից, որոնք այս դիզյունկտում չեն մասնակցում: Եթե այդ փոփոխականներին համապատասխանող $\delta_j=0$, ապա անհավասարությանը գումարենք $x_j\geq 0$, իսկ եթե $\delta_j=1$, ապա անհավասարությանը գումարենք $1-x_j\geq 0\,(1\geq x_j)$: Այսպիսով, կատարելով ոչ ավելի, քան n քայլ, ստացանք $\sum_{i=1}^{n}\alpha(x_i,\delta_i)\geq 1$ անհավասարությունը տվյալ $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)\in E^n$ հավաքի համար: Բոլոր հավաքների համար համապատասխան անհավասարությունը ստանալու համար պետք է կատարել ոչ ավելի, քան $2^n\cdot n$ քայլ:

բ) Այժմ ենթադրենք, թե $2^n\cdot n+2\cdot(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^k)$ քայլում ստացել ենք $\sum_{i=1}^{k}\alpha(x_i,\delta_i)\geq 1$ անհավասարությունները բոլոր $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_k)\in E^k$ հավաքների համար, որտեղ $2\leq k\leq n$:

Դիտարկենք ցանկացած $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{k-1})\in E^{k-1}$ հավաքի համար $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{k-1},0)$ և $(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{k-1},1)$ հավաքներին համապատասխանող անհավասարությունները. $\sum_{i=1}^{k-1}\alpha\left(x_i,\delta_i\right)+x_k\geq 1$, $\sum_{i=1}^{k-1}\alpha\left(x_i,\delta_i\right)+1-x_k\geq 1$:

Այս երկու անհավասարությունները գումարելով՝ կստանանք

$$2\sum_{i=1}^{k-1}\alpha\left(x_i,\delta_i\right)\geq 1\Rightarrow\sum_{i=1}^{k-1}\alpha\left(x_i,\delta_i\right)\geq 1:$$

Այսինքն, յուրաքանչյուր $\left(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{k-1}\right)\in E^{k-1}$ հավաքի համար կատարելով երկու քայլ, ստացանք $\sum_{i=1}^{k-1}\alpha\left(x_i,\delta_i\right)\geq 1$: Բոլոր $\left(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{k-1}\right)\in E^{k-1}$ հավաքներին համապատասխան անհավասարությունները կստանանք

$$2^n\cdot n+2\cdot(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^k)+2\cdot 2^{k-1}=2^n\cdot n+2\cdot(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^k+2^{k-1})$$

քայլում, որը ապացուցում է օժանդակ պնդումը:

Այսպիսով՝ $m=1$ դեպքում $\begin{cases}x_1\geq 1,\\ 1-x_1\geq 1\end{cases}$ անհավասարությունները ստացանք $2^n\cdot n+2\cdot(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2^1)$ քայլում: Քանի որ $\begin{cases}x_1\geq 1\\ 1-x_1\geq 1\end{cases}\Rightarrow 1\geq 2\Rightarrow 0\geq 1$, ապա $0\geq 1$ անհավասարությունը արտածվեց

$$2^n\cdot n+2\cdot(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+1)=2^n\cdot n+2\cdot(2^n-1)\leq 3\cdot 2^n\cdot n$$

քայլում:

1.3. *«Resolution» (R)* համակարգը առավել հանրահայտ է, հետևաբար, մանրամասն սահմանման կարիք չունի: Հիշեցնենք, որ այն նույնպես միտված է կ.ն.ձ.-ով տրված բանաձևերի հերքմանը: R համակարգում աքսիոմներ չեն ֆիքսվում: Արտածման միակ կանոնը ռեզոլյուցիայի կանոնն է:

$$\frac{D_1 \vee \{x_i\} \qquad D_2 \vee \{\overline{x_i}\}}{D_1 \vee D_2},$$

որտեղ D_1, D_2-ը դիզյունկտներ են, իսկ x_i-ն՝ տրամաբանական փոփոխական:

Յուրաքանչյուր A նույնաբանության համար կառուցում ենք $\neg A$-ին համարժեք կ.ն.ձ.-ն և նրա դիզյունկտներից յուրաքանչյուրը աքսիոմ համարելով՝ կիրառում վերոհիշյալ կանոնը: Նպատակը դատարկ դիզյունկտ (ϕ) արտածելն է: $\neg A$ բանաձևի հերքումը R-ում կոչվում է A-ի R-արտածում:

R-համակարգում ընդունված է արտածումները դիտարկել ծառի տեսքով (արտածմանը համապատասխանող հանրահայտ եղանակներով կառուցված գրաֆը ծառ է):

Դժվար չէ համոզվել, որ

$$\frac{D_1 \vee \{x_i\} \qquad D_2 \vee \{\overline{x_i}\}}{D_1 \vee D_2}$$

կանոնը համարժեք է

$$\frac{D_1 \vee D_2 \vee \{x_i\} \quad D_1 \vee D_2 \vee \{\overline{x_i}\}}{D_1 \vee D_2}$$

կանոնին, հետևաբար, տրված նույնաբանության համար $\neg A$-ին համապատասխանող դիզյունկտների բազմությունից ϕ դիզյունկտը կարտածվի R-համակարգում այն և միայն այն դեպքում, երբ այն արտածվի R'-համակարգում, որը ստացվում է R-ից՝ նրան ավելացնելով $\dfrac{D}{D \vee D'}$ լրացման կանոնը, որտեղ D, D'-ը դիզյունկտներ են:

Ակնհայտ է, որ, կիրառելով լրացման կանոնը, կարելի է 1.2 ա) կետի նմանությամբ «լրացնել» անհրաժեշտ փոփոխականները կամ նրանց ժխտումները, ապա, կիրառելով «համապատասխան» զույգերի նկատմամբ ռեզոլյուցիայի կանոնը, 1.2. բ) կետի նմանությամբ արտածել ϕ դիզյունկտը: Ակնհայտ է նաև, որ կիրառվող քայլերի քանակը նույնն է, ինչ որ 1.2 կետում:

2. ***CP* և *R* համակարգերում արտածումների բարդության գնահատականները:** Այստեղ տրվելու են CP- և R-համակարգերի համար արտածումների բարդության գնահատականները բանաձևերի որոշակի դասերի համար: Գրականությունից հայտնի են առանձին բանաձևեր, որոնց համար CP- և R-համակարգերում ստացված են արտածման բարդության ստորին ցուցչային գնահատականներ (*Clique* և PHP_n բանաձևերը համապատասխանաբար [1]):

Սահմանում: CP- և R-համակարգերում φ նույնաբանության արտածման նվազագույն քայլերի (իրարից տարբեր հավասարումների՝ CP-ում և իրարից տարբեր դիզյունկտների՝ R-ում) քանակը անվանենք φ-ի արտածման բարդություն և նշանակենք T_{φ}^{CP} և T_{φ}^{R} համապատասխանաբար:

Օգտագործելով [2]-ում ներմուծված φ-որոշիչ կոնյունկտի և մինիմալ φ-որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ տեսքի գաղափարները և նրանց որոշակի հատկությունները՝ այստեղ ապացուցելու ենք, որ ցանկացած բավականաչափ մեծ n-ի և $\forall i$-ի համար, $1 \le i \le \left[\dfrac{n}{2}\log_n 2\right]$, գոյություն ունի այնպիսի φ_n^i նույնաբանությունների հաջորդականություն, որ φ_n^i-ի երկարությունը n կարգի է, իսկ $T_{\varphi_n^i}^{CP} = \Omega(n^i)$ և $T_{\varphi_n^i}^{CP} = O(n^{i+1})$: Նույնը նաև $T_{\varphi_n^i}^{R}$-ի համար:

Հիշեցնենք [2]-ում տրված մի քանի սահմանումներ:

Ինչպես ընդունված է, փոփոխականները և փոփոխականների ժխտումները կանվանենք լիտերալներ: K կոնյունկտը կներկայացնենք որպես լիտերալների բազմություն և կանվանենք դաս (ոչ մի դաս չի կարող պարունակել և՛ փոփոխականը, և՛ այդ փոփոխականի ժխտումը): Դ.ն.ձ.-ն կարող է արտահայտվել որպես $\{K_1, K_2, \cdots, K_l\}$ դասերի բազմություն:

Էլիմինացիայի կանոնը (ε կանոնը) արտածում է $K' \cup K''$ դասը $K' \cup \{x\}$ և $K'' \cup \{\overline{x}\}$ դասերից, որտեղ K' - ը և K'' - ը դասեր են, իսկ x – ը տրամաբանական փոփոխական է:

Կասենք, որ K կոնյունկտը արտածվում է D դ.ն.ձ.-ից, եթե կա դասերի այնպիսի վերջավոր հաջորդականություն, որ յուրաքանչյուր դաս հաջորդականության մեջ կամ D-ի դասերից մեկն է, կամ արտածվում է հաջորդականության մեջ իրեն նախորդող դասերից ε կանոնի համաձայն և վերջին դասը K-ն է:

D դ.ն.ձ.-ն կոչվում է լրիվ (նույնաբանություն է), եթե Λ դատարկ կոնյունկտը կարող է արտածվել D-ից:

D լրիվ դ.ն.ձ.-ից Λ դատարկ կոնյունկտի արտածման ժամանակ ε կանոնի կիրառման նվազագույն քանակը կանվանենք D-ի բարդություն և կնշանակենք $C(D)$:

Ենթադրենք $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$-ը φ բանաձևի իրարից տարբեր փոփոխականների բազմությունն է: Հետևելով [2]-ին՝ $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \in E^m$ $(1 \le m \le n)$ հավաքի համար $K = \{x^{\sigma_1}{}_{i_1}, x^{\sigma_2}{}_{i_2}, \ldots, x^{\sigma_m}{}_{i_m}\}$ կոնյունկտը կանվանենք φ-որոշիչ, եթե ամեն մի x_{i_j}-ին σ_j արժեքը վերագրելով՝ հնարավոր լինի որոշել φ-ի արժեքը՝ անկախ մնացած փոփոխականների արժեքից:

Ենթադրենք φ-ն նույնաբանություն է:

D լրիվ դ.ն.ձ.-ն կանվանենք φ-որոշիչ, եթե D-ի յուրաքանչյուր կոնյունկտ φ-որոշիչ է: Ցանկացած φ-որոշիչ դ.ն.ձ. D, որն ունի մինիմալ բարդություն, կանվանենք մինիմալ որոշիչ դ.ն.ձ. φ-ի համար և կնշանակենք $D_\varphi^{\min}$:

Դժվար չէ տեսնել, որ հետևյալ պնդումը ճիշտ է:

Եթե φ նույնաբանության ցանկացած φ-որոշիչ կոնյունկտ պարունակում է առնվազն m լիտերալ, ապա $C(D_\varphi^{\min}) \ge 2^{m+1} - 1$ (լեմմա 1, [2]):

Դիտարկենք հետևյալ նույնաբանությունները՝

$$\psi_{n,m} = \bigvee_{\sigma\in E^n} \mathop{\&}_{j=1}^{m} \left(\bigvee_{i=1}^{n} x_{i,j}^{\sigma_i} \right), \; (n \geq 1, \quad 1 \leq m \leq 2^n - 1):$$

Դժվար չէ համոզվել, որ յուրաքանչյուր $\psi_{n,m}$-որոշիչ կոնյունկտ պարունակում է առնվազն m լիտերալ, հետևաբար, վերոհիշյալ պնդումից հետևում է, որ ցանկացած n-ի համար $C\left(D_{\psi_{n,m}}^{\min}\right) \geq 2^{m+1} - 1$:

Նկատենք, որ եթե φ նույնաբանության համար φ-որոշիչ կոնյունկտի մինիմալ լիտերալների քանակը m է, ապա $\neg\varphi$-ի ցանկացած կ.ն.ձ.-ի յուրաքանչյուր դիզյունկտ պետք է պարունակի նույնպես առնվազն m լիտերալ, քանի որ հակառակ դեպքում այդ դիզյունկտը ժխտող կոնյունկտը կլինի ավելի քիչ թվով լիտերալներով φ-որոշիչ:

Այստեղից ստացվում է, որ $\neg\psi_{n,m}$-ին համապատասխանող կ.ն.ձ.-ն պարունակում է առնվազն 2^m դիզյունկտ, որոնցից յուրաքանչյուրի կիրառումը թե՛ CP-արտածման, թե՛ R-արտածման մեջ անհրաժեշտ է, հետևաբար՝

$$T_{\psi_{n,m}}^{CP} > 2^m \quad \text{և} \quad T_{\psi_{n,m}}^{R} > 2^m:$$

Սահմանում: Դիցուք φ-ն նույնաբանություն է և $D_{\varphi}^{\min}$-ը նրա որևէ մինիմալ φ-որոշիչ դ.ն.ձ. է: $D_{\varphi}^{\min}$-ի յուրաքանչյուր փոփոխական անվանենք կարևոր φ-ի համար:

Հայտնի են բազմաթիվ օրինակներ այնպիսի նույնաբանությունների, որոնց կարևոր փոփոխականների քանակը կարող է էապես ավելի փոքր լինել նրանց բոլոր փոփոխականների քանակից:

Բնական է, որ 1.2 և 1.3-ում նկարագրված արտածումների կառուցման ընթացակարգերը կարող են կիրառվել ոչ թե նույնաբանության բոլոր փոփոխականների նկատմամբ, այլ միայն բոլոր կարևորների նկատմամբ, հետևաբար, ստույգ է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ: Ցանկացած բավականաչափ մեծ n-ի և $\forall i$-ի համար, $1 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\log_n 2\right]$, գոյություն ունի այնպիսի φ_n^i նույնաբանությունների հաջորդականություն, որոնցից ցանկացածի երկարությունը n կարգի է, իսկ

$$T_{\varphi_n^i}^{CP} = \Omega(n^i) \quad \text{և} \quad T_{\varphi_n^i}^{CP} = O(n^{i+1}),$$

$$T_{\varphi_n^i}^{CP} = \Omega(n^i) \quad \text{և} \quad T_{\varphi_n^i}^{CP} = O(n^{i+1}):$$

Թեորեմի ապացույցը կարելի է ստանալ ինչպես և [2]-ում՝ օգտագործելով $\varphi_n^i = \psi_{n,n^i}$ բանաձևերը և հիմնվելով վերոհիշյալ դատողությունների վրա:

Ինֆորմատիկայի հանրահաշվատրամաբանական մեթոդների ամբիոն

Ստացվել է 14.07.2006

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **Buss S.** Propositional Proof Complexity, An Introduction, Handbook of Proof Theory, North-Holland, 1998.

2. **Чубарян А.А.** – Известия НАН РА, Математика, 2003, т. 37, № 5, с. 71–84.

С. Р. АЛЕКСАНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ВЫВОДОВ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ КЛАССИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Резюме

В этой статье описаны нормальные формы выводов для некоторых нетрадиционных систем классического исчисления высказываний. На их основе с использованием понятия минимально-определяющей дизъюнктивной нормальной формы для φ получены верхние и нижние оценки сложности выводов.

S. R. ALEKSANYAN

ON PROOF NORMAL FORMS FOR SOME SYSTEMS OF CLASSICAL PROPOSITIONAL LOGIC

Summary

In this paper proof normal forms are given for some non-traditional systems of classical propositional logic. On basis of that forms the upper and lower bounds of proof complexity are given using the notion of φ-determinative disjunctive normal form.